Lógica Computacional

Capítulo 3 - Lógica de Primeira Ordem

Paula Gouveia e F. Miguel Dionísio
Instituto Superior Técnico

Capítulo 3

Lógica de primeira ordem

3.1 Introdução

Este capítulo é dedicada à lógica de primeira ordem. A linguagem da lógica de primeira ordem é mais expressiva que a linguagem da lógica proposicional. No âmbito da lógica proposicional, as fórmulas mais simples, os símbolos proposicionais, não têm estrutura interna. Uma proposição ou asserção representada por um símbolo propocional é assim simplesmente representada através de único símbolo, em geral, uma letra. As outras fórmulas da lógica propocional, para além de $\perp$, são as obtidas a partir dos símbolos proposicionais e de $\perp$ usando os conectivos lógicos conjunção, disjunção ou implicação, pelo que as asserções mais complexas que estas fórmulas representam são apenas combinações booleanas das representadas pelos símbolos proposicionais (ou $\perp$). Esta situação não permite a representação da estrutura interna de certas asserções. Não permite, por exemplo, a representação simbólica explícita de entidades ou indivíduos nem permite que a partir desta representação se possam representar asserções que afirmem que certas entidades têm determinadas propriedades ou que estão numa determinada relação com outras entidades. Torna-se assim complicado representar asserções do tipo "existem números inteiros pares" ou "o quadrado de qualquer número inteiro não nulo é um número inteiro positivo" e tirar partido dessa representação para desenvolver raciocínios do tipo "se o quadrado de qualquer número inteiro não nulo é positivo" e "-3 é um número inteiro não nulo" então "o quadrado de -3 é um número inteiro positivo". A linguagem da lógica de primeira ordem vai permitir fazer referência explícita a entidades ou indivíduos, representar funções sobre essas entidades (por exemplo, a função *quadrado de*) e propriedades ou predicados sobre essas entidades (por exemplo, os predicados *ser número inteiro*, *ser número positivo* ou *ser número par*). Permite também a quantificação sobre entidades, ou seja, permite representar asserções que exprimam a ideia de que *todas* as entidades possuem um determinada propriedade ou que *existem* entidades que possuem uma outra propriedade.

Exemplos de textos relevantes sobre lógica de primeira ordem são [4], [2], [10], [8], [13] e [5].

Este capítulo tem uma estrutura semelhante à do capítulo dedicado à lógica proposicional. Em primeiro lugar são apresentados os aspectos sintácticos e semânticos da lógica de primeira ordem. De seguida apresenta-se o sistema de dedução natural $\mathcal{N}_c$. Seguem-se três outros sistemas dedutivos: o sistema de sequentes $\mathcal{S}_c$ (e a sua variante $\mathcal{S}'_c$), o sistema de *tableaux* $\mathcal{T}_c$ e o sistema de tipo Hilbert $\mathcal{H}_c$. No final de várias secções são propostos exercícios sobre os assuntos nelas expostos. De novo as secções com a indicação ($\star$) são dedicadas a assuntos com um carácter mais técnico que podem ser omitidos numa primeira leitura.

A organização deste capítulo é a seguinte: na secção 3.2 introduzem-se os aspectos sintácticos e na secção 3.3 os aspectos semânticos; na secção 3.4 apresenta-se o sistema de dedução natural $\mathcal{N}_c$, sendo a secção 3.5 dedicada ao sistema $\mathcal{S}_c$, a secção 3.6 ao sistema $\mathcal{T}_c$ e a secção 3.7 ao sistema $\mathcal{H}_c$.

3.2 Sintaxe

Nesta secção apresentam-se os aspectos sintácticos da lógica de primeira ordem. Introduz-se em primeiro lugar a noção de assinatura de primeira ordem, depois a noção de alfabeto e seguidamente a linguagem das fórmulas (ou seja, a linguagem da lógica de primeira ordem) sobre o alfabeto e um conjunto de variáveis.

Numa assinatura de primeira ordem são introduzidos os símbolos que representam as funções (de diferentes aridades) e os símbolos que representam os predicados (de diferentes aridades).

Definição 3.2.1 ASSINATURA DE PRIMEIRA ORDEM
Uma *assinatura de primeira ordem* é um par

$$\Sigma = (SF, SP)$$

onde

- $SF = \{SF_i\}_{i \in I\!N_0}$;
- $SP = \{SP_i\}_{i \in I\!N_0}$,

são famílias de conjuntos indexados em $I\!N_0$ tais que os conjuntos SF_i, SP_i, $i \in I\!N_0$, são disjuntos dois a dois. Para cada $i \in I\!N_0$, SF_i é o *conjunto de símbolos de função de aridade* i e SP_i é o *conjunto de símbolos de predicado de aridade* i. Os símbolos de função de aridade 0 são também designados *símbolos de constante* ou *constantes*. Os símbolos de predicados de aridade 0 são também designados *símbolos proposicionais*.
■

Exemplo 3.2.2 O par $\Sigma = (SF, SP)$ onde

- $SF = \{SF_i\}_{i \in I\!N_0}$ é tal que
  - $SF_0 = \{\odot\}$;
  - $SF_1 = \{s, q\}$;
  - $SF_i = \emptyset$ para cada $i \geq 2$;
- $SP = \{SP_i\}_{i \in I\!N_0}$;
  - $SP_1 = \{Q\}$;
  - $SP_2 = \{M\}$;
  - $SP_i = \emptyset$ para cada $i = 0$ e $i \geq 3$,

é uma assinatura de primeira ordem. São considerados o símbolo de função $\odot$ de aridade 0, os símbolos de função s e q de aridade 1, o símbolo de predicado Q de aridade 1 e o símbolo de predicado M de aridade 2. O símbolo $\odot$ é, em particular, um símbolo de constante. Estes símbolos representam *nomes* de funções ou predicados os quais, como se verá adiante, podem vir a ser interpretados de formas diferentes, ou seja, a cada um destes símbolos pode ser associada uma certa função ou um certo predicado (com aridade correspondente). Assim, em particular, ao símbolo s poderá vir a ser associada uma dada função unária

Informalmente, os predicados podem ser vistos como representando propriedades envolvendo zero, uma ou mais entidades. Mais precisamente, um predicado Π de aridade n (ou n-ário) sobre um conjunto A, com $n \in I\!N_0$, é uma aplicação $\Pi : A^n \to \{0, 1\}$. No caso de particular de $n = 1$, os elementos de A^1 (ou seja, A) cuja imagem é 1 correspondem às entidades para os quais o predicado é verdadeiro e os elementos de A cuja imagem é 0 correspondem às entidades para os quais o predicado é falso. No caso de $n = 2$, os elementos de A^2 cuja imagem é 1 correspondem aos pares de entidades para as quais o predicado é verdadeiro e os elementos de A^2 cuja imagem é 0 correspondem aos pares de entidades para as quais o predicado é falso. Os casos $n > 2$ são, naturalmente, semelhantes. Quando $n = 0$, $\Pi : A^0 \to \{0, 1\}$ é uma função constante, pois A^0 é um conjunto singular, e Π pode ser identificado com o valor da função.

Voltando ao exemplo, ao símbolo Q poderá vir a ser associado um dado predicado unário e ao símbolo M poderá vir a ser associado um dado predicado binário. ∎

Definição 3.2.3 ALFABETO DE PRIMEIRA ORDEM SOBRE Σ E X
Seja $\Sigma = (SF, SP)$ uma assinatura de primeira ordem, com $SF = \{SF_i\}_{i \in I\!N_0}$ e $SP = \{SP_i\}_{i \in I\!N_0}$. Seja X um conjunto numerável cujos elementos se designam por *variáveis*. O *alfabeto de primeira ordem sobre* Σ *e* X designa-se por Alf_Σ^X e é constituído por

- cada um dos elementos de SF_i para cada $i \in I\!N_0$;
- cada um dos elementos de SP_i para cada $i \in I\!N_0$;
- cada um dos elementos de X;
- o símbolo $\perp$ (absurdo, contradição, falso ou falsidade);
- os conectivos lógicos $\to$ (implicação), $\wedge$ (conjunção) e $\vee$ (disjunção);
- os quantificadores $\forall$ (para todo) e $\exists$ (existe);
- o símbolo auxiliar , e os símbolos auxiliares (e). ∎

Observação 3.2.4 Sempre que seja feita referência a um alfabeto Alf_Σ^X, com $\Sigma = (\{SF_i\}_{i \in I\!N_0}, \{SF_i\}_{i \in I\!N_0})$, assume-se que $X \cap SF_i = \emptyset$ e $X \cap SP_i = \emptyset$ para cada $i \in I\!N_0$. Isto significa que não existe confusão de símbolos: um símbolo de função ou predicado não pode ser também utilizado como variável. Assume-se também que cada conjunto de símbolos de função e cada conjunto de símbolos de predicado é finito ou numerável.

Consideram-se fixados uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$ com $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e um conjunto numerável de variáveis X.

Segue-se agora a definição do conjunto dos termos induzido pelo alfabeto Alf_Σ^X. Um termo é uma constante, uma variável ou um símbolo de função aplicado a um ou mais termos (dependendo da sua aridade).

Definição 3.2.5 CONJUNTO DOS TERMOS INDUZIDO POR Alf_Σ^X
O *conjunto dos termos induzido por* Alf_Σ^X designa-se por T_Σ^X e é o conjunto definido indutivamente da seguinte forma:

- $c \in T_\Sigma^X$ para cada $c \in SF_0$;
- $x \in T_\Sigma^X$ para cada $x \in X$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ então $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma^X$ para cada $f \in SF_n$ com $n > 0$. ■

Exemplo 3.2.6 Considerando a assinatura Σ apresentada no Exemplo 3.2.2 e assumindo que $x, y, z \in X$, tem-se que $\odot$, x, $s(\odot)$, $q(y)$, $s(q(z))$ são exemplos de elementos de T_Σ^X.

Os termos vão representar as entidades cujas propriedades poderão vir a ser descritas através das fórmulas. ■

Definição 3.2.7 LINGUAGEM DE PRIMEIRA ORDEM INDUZIDA POR Alf_Σ^X
A *linguagem de primeira ordem* (*conjunto das fórmulas de primeira ordem* ou *linguagem das fórmulas de primeira ordem*) induzida por Alf_Σ^X designa-se por F_Σ^X e é o conjunto definido indutivamente da seguinte forma:

- $P \in F_\Sigma^X$ para cada $P \in SP_0$;
- $\perp \in F_\Sigma^X$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ então $P(t_1, \ldots, t_n) \in F_\Sigma^X$ para cada $P \in SP_n$ com $n > 0$;
- $(\varphi \to \varphi') \in F_\Sigma^X$, $(\varphi \wedge \varphi') \in F_\Sigma^X$, $(\varphi \vee \varphi') \in F_\Sigma^X$ quaisquer que sejam $\varphi, \varphi' \in F_\Sigma^X$;
- $(\forall x\, \varphi) \in F_\Sigma^X$, $(\exists x\, \varphi) \in F_\Sigma^X$ quaisquer que sejam $x \in X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$.

Os elementos de F_Σ^X são as *fórmulas* da linguagem de primeira ordem induzida por Alf_Σ^X. O conjunto das *fórmulas atómicas* denota-se-se por FA_Σ^X é o subconjunto de F_Σ^X constituído pelas fórmulas que não contêm conectivos ou quantificadores. ■

Como anteriormente, omitem-se parênteses mais exteriores das fórmulas.

Exemplo 3.2.8 Considerando a assinatura Σ apresentada no Exemplo 3.2.2 e assumindo que $x, y, z \in X$, tem-se que

- $Q(\odot)$
- $M(x, y)$
- $Q(s(x)) \wedge M(q(s(y)), s(x))$
- $\forall x\, Q(x)$
- $\exists z\, (M(z, \odot) \wedge Q(z))$

são exemplos de elementos de F_Σ^X.

As fórmulas representam asserções acerca das entidades representadas pelos termos. ∎

Definição 3.2.9 Abreviaturas

- $\neg\varphi =_{abv} \varphi \rightarrow \perp$;
- $\varphi \leftrightarrow \varphi' =_{abv} (\varphi \rightarrow \varphi') \wedge (\varphi' \rightarrow \varphi)$;
- $\top =_{abv} \neg\perp$. ∎

Observação 3.2.10 A razão pela qual se consideram simultaneamente como conectivos primitivos os conectivos $\rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$ é semelhante à referida no caso da lógica proposicional. De igual modo, também não é necessário considerar como primitivos ambos os quantificadores, mas, por motivo idêntico, tomou-se aqui esta opção.

Definição 3.2.11 Subfórmulas
Sendo $\varphi \in F_\Sigma^X$, *conjunto das subfórmulas de* φ denota-se por $Sbf(\varphi)$ e define-se indutivamente como no caso da lógica proposicional (Definição **??**) considerando ainda que se φ é $\forall x\, \varphi'$ ou $\exists x\, \varphi'$ então $Sbf(\varphi) = Sbf(\varphi') \cup \{\varphi\}$. As restantes noções e notações associadas são idênticas às consideradas no caso da lógica proposicional. ∎

Na sequência serão necessárias as noções que se apresentam seguidamente.

Definição 3.2.12 VARIÁVEIS EM TERMO
Para cada $t \in T_\Sigma^X$, *conjunto das variáveis de* t denota-se por $V(t)$ e define-se indutivamente como se segue.

- $V(c) = \emptyset$ para cada $c \in SF_0$;
- $V(x) = \{x\}$ para cada $x \in X$;
- $V(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} V(t_i)$, se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ e $f \in SF_n$ com $n > 0$.

O termo t diz-se *fechado* se $V(t) = \emptyset$ e *aberto* caso contrário. Dado $T \subseteq T_\Sigma^X$, $V(T)$ é, naturalmente, $\bigcup_{t \in T} V(t)$. ■

Definição 3.2.13 VARIÁVEIS LIVRES EM FÓRMULA
Para cada $\varphi \in F_\Sigma^X$, o *conjunto das variáveis livres de* φ (ou *das variáveis que têm ocorrências livres em* φ) denota-se por $VL(\varphi)$ e define-se indutivamente como se segue:

- $VL(\varphi) = \emptyset$ para cada $\varphi \in SP_0 \cup \{\perp\}$;
- $VL(P(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} V(t_i)$, se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ e $P \in SP_n$ com $n > 0$;
- $VL(\forall x\, \varphi) = VL(\exists x\, \varphi) = VL(\varphi) \backslash \{x\}$;
- $VL(\varphi' \to \varphi'') = VL(\varphi' \wedge \varphi'') = VL(\varphi' \vee \varphi'') = VL(\varphi') \cup VL(\varphi'')$.

φ diz-se *fechada* se $VL(\varphi) = \emptyset$. Dado $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$, $VL(\Phi) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} VL(\varphi)$. ■

Definição 3.2.14 VARIÁVEIS MUDAS EM FÓRMULA
Para cada $\varphi \in F_\Sigma^X$, o *conjunto das variáveis mudas de* φ (ou *das variáveis que têm ocorrências mudas em* φ) denota-se por $VM(\varphi)$ e define-se indutivamente como se segue.

- $VM(\varphi) = \emptyset$ para cada $\varphi \in FA_\Sigma^X$;
- $VM(\forall x\, \varphi) = VM(\exists x\, \varphi) = VM(\varphi) \cup \{x\}$;
- $VM(\varphi' \to \varphi'') = VM(\varphi' \wedge \varphi'') = VM(\varphi' \vee \varphi'') = VM(\varphi') \cup VM(\varphi'')$.

Dado $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$, $VM(\Phi) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} VM(\varphi)$. ■

Definição 3.2.15 VARIÁVEIS EM FÓRMULA
O *conjunto das variáveis de* $\varphi \in F_\Sigma^X$ é o conjunto $V(\varphi) = VL(\varphi) \cup VM(\varphi)$. Dado $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$, $V(\Phi) = \bigcup_{\varphi\in\Phi} V(\varphi)$. ∎

Exemplo 3.2.16

(i) Considerando a fórmula $\varphi_1 = Q(y) \wedge (\forall x\, (M(x,z)))$ tem-se que $VL(\varphi_1) = \{y,z\}$, $VM(\varphi_1) = \{x\}$ e $V(\varphi_1) = \{x,y,z\}$.

(ii) Considerando a fórmula $\varphi_2 = \forall y\, (M(x,y) \wedge (\forall x\, Q(x)))$ tem-se que $VL(\varphi_2) = \{x\}$, $VM(\varphi_2) = \{x,y\}$ e $V(\varphi_2) = \{x,y\}$.

Note-se que, como exemplifica o caso da fórmula φ_2, uma variável pode ter ocorrências livres e ocorrências mudas numa fórmula. ∎

Definição 3.2.17 FECHO UNIVERSAL DE FÓRMULA
Seja $\varphi \in F_\Sigma^X$. Se $VL(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $n \geq 1$, então a fórmula

$$\forall x_1 (\ldots (\forall x_n\, \varphi) \ldots)$$

é um *fecho universal de* φ. Se $n = 0$ (ou seja, $VL(\varphi) = \emptyset$) considera-se que φ é *fecho universal de* φ. ∎

Segue-se agora a noção de substituição de uma variável por um termo numa fórmula. Esta noção nasce da necessidade de representar o seguinte raciocínio. Informalmente[1], $\forall x\, Q(x)$ exprime a ideia de que o predicado representado por Q é verificado por todos os elementos do universo em questão. Deste modo, sendo t um termo (e representado, por isso, um elemento do universo em causa), faz sentido concluir $Q(t)$, isto é, faz sentido concluir que, em particular, o elemento representado por t verifica o predicado representado por Q. Pode dizer-se que a fórmula $Q(t)$ é a fórmula que se obtém quando em $Q(x)$ se substitui a variável x (a variável universalmente quantificada em $\forall x\, Q(x)$) por um termo particular: o termo t. Faz sentido escrever então a fórmula $(\forall x\, Q(x)) \to Q(t)$. O raciocínio anterior pode ser feito relativamente a qualquer termo em T_Σ^X. E este raciocínio pode, evidentemente, estender-se também a qualquer fórmula do tipo $\forall x \varphi$. Para se poder escrever

[1]As justificações rigorosas (com base nos conceitos semânticos da lógica de primeira ordem) relativas às questões descritas neste parágrafo e nos parágrafos seguintes podem ser construídas a partir das noções que irão ser introduzidas na secção 3.3.

uma fórmula semelhante à implicação referida, utiliza-se então $(\varphi)^x_t$ (ou φ^x_t) para representar, à semelhança do caso anterior, a fórmula que se obtém a partir de φ quando se substituem as ocorrências de x por t. Pode então considerar-se a fórmula $(\forall x\,\varphi) \to (\varphi)^x_t$. Em rigor, é necessário exigir uma outra condição: t tem de ser livre para x em φ mas este assunto será abordado nos parágrafos seguintes.

Antes da noção de substituição de uma variável por um termo numa fórmula torna-se necessário apresentar a noção de substituição de uma variável x por um termo t num outro termo s.

Definição 3.2.18 SUBSTITUIÇÃO EM TERMO
Para cada $t, s \in T^X_\Sigma$ e $x \in X$, o termo que se obtém por *substituição de x por t em s* denota-se por $(s)\,^x_t$ e define-se indutivamente como se segue.

- $(x)\,^x_t = t$;
- $(v)\,^x_t = v$ se $v \in X\backslash\{x\}$;
- $(c)\,^x_t = c$ para cada $c \in SF_0$;
- $(f(t_1, \ldots, t_n))\,^x_t = f((t_1)\,^x_t, \ldots, (t_n)\,^x_t)$, se $t_1, \ldots, t_n \in T^X_\Sigma$ e $f \in SF_n$ com $n > 0$.

Para não sobrecarregar a notação admite-se que, por vezes, os parênteses na notação $(s)\,^x_t$ possam ser omitidos. ∎

Definição 3.2.19 SUBSTITUIÇÃO EM FÓRMULA
Para cada $\varphi \in F^X_\Sigma$, $t \in T^X_\Sigma$ e $x \in X$, a fórmula que se obtém por *substituição de x por t em φ* denota-se por $(\varphi)\,^x_t$ e define-se indutivamente como se segue.

- $(\varphi)\,^x_t = \varphi$ para cada $\varphi \in SP_0 \cup \{\perp\}$;
- $(P(t_1, \ldots, t_n))\,^x_t = P((t_1)\,^x_t, \ldots, (t_n)\,^x_t)$, se $t_1, \ldots, t_n \in T^X_\Sigma$ e $P \in SP_n$ com $n > 0$;
- $(\forall x\,\varphi)\,^x_t = \forall x\,\varphi$;
- $(\exists x\,\varphi)\,^x_t = \exists x\,\varphi$;
- $(\forall v\,\varphi)\,^x_t = \forall v\,(\varphi)\,^x_t$ se $v \in X\backslash\{x\}$;
- $(\exists v\,\varphi)\,^x_t = \exists v\,(\varphi)\,^x_t$ se $v \in X\backslash\{x\}$;

- $(\varphi' \rightarrow \varphi'')\,{}^{x}_{t} = (\varphi')\,{}^{x}_{t} \rightarrow (\varphi'')\,{}^{x}_{t}$;
- $(\varphi' \wedge \varphi'')\,{}^{x}_{t} = (\varphi')\,{}^{x}_{t} \wedge (\varphi'')\,{}^{x}_{t}$;
- $(\varphi' \vee \varphi'')\,{}^{x}_{t} = (\varphi')\,{}^{x}_{t} \vee (\varphi'')\,{}^{x}_{t}$.

Para não sobrecarregar a notação admite-se que, por vezes, os parênteses na notação $(\varphi)\,{}^{x}_{t}$ possam ser omitidos. ∎

Exemplo 3.2.20 Considere-se a fórmula $\varphi = \forall x\,(Q(x) \rightarrow M(x, s(y)))$ e a fórmula $\psi = Q(z) \wedge (\exists z\ M(q(z), x))$. Sendo $t = q(y)$ e $t' = s(z)$ tem-se que

– $(s(x))\,{}^{x}_{t} = s(q(y))$;

– $(\varphi)\,{}^{y}_{t} = \forall x\,(Q(x) \rightarrow M(x, s(q(y))))$;

– $(\varphi)\,{}^{x}_{t} = \varphi$;

– $(\psi)\,{}^{z}_{t} = Q(q(y)) \wedge (\exists z\ M(q(z), x))$;

– $(\psi)\,{}^{x}_{t'} = Q(z) \wedge (\exists z\ M(q(z), s(z)))$. ∎

Note-se que da Definição 3.2.19 resulta que, ao substituir uma variável x por um termo numa fórmula, só nas ocorrências livres de x são efectivamente realizadas as substituições. Deste modo, se uma variável só ocorre muda numa fórmula, a sua substituição por um qualquer termo não modifica a fórmula de partida.

No caso desta restrição não se verificar poder-se-ia ter a seguinte situação. Considerem-se as fórmulas $\varphi_1 = \forall y\, Q(y)$ e $\varphi_2 = \forall x\, Q(x)$. Intuitivamente ambas exprimem a mesma ideia: todos os elementos do universo em questão verificam o predicado representado por Q. A única diferença é que num caso se utilizou a variável y e no outro se utilizou a variável x. Sendo c uma constante, no caso de φ_1 ter-se-ia naturalmente que $(\forall y\, Q(y))\,{}^{x}_{c} = \forall y\, Q(y)$. Quanto ao caso φ_2, claro que não faria sentido ter $(\forall x\, Q(x))\,{}^{x}_{c} = \forall c\, Q(c)$ (pois $\forall c\, Q(c)$ não é um fórmula em F^X_Σ), mas poder-se-ia considerar a possibilidade $(\forall x\, Q(x))\,{}^{x}_{c} = \forall x\, Q(c)$. Assim, partindo de duas fórmulas φ_1 e φ_2 que exprimem a mesma ideia obter-se-ia, após a substituição, fórmulas que exprimem ideias bem distintas (note-se que $\forall x\, Q(c)$ exprime apenas que o predicado representado por Q é verificado pela entidade representada pela constante c). Esta situação não é usualmente desejável, ou seja, não é usualmente desejável que duas fórmulas que diferem apenas na designação atribuída à entidade que representa os elementos do universo se transformem em algo radicalmente diferente após substituição.

Uma outra situação também relacionada com substituições (mas que não é usualmente contemplada directamente na definição de substituição) é a seguinte. Suponha-se que o universo em questão é o conjunto dos inteiros com as operações habituais. A substituição de x por[2] $y+1$ em $\exists y\, M(y,x)$, $(\exists y\, M(y,x))\,^{x}_{y+1}$, é, seguindo a Definição 3.2.19, $\exists y\, M(y, y+1)$. Informalmente, se por exemplo se interpretar M como um predicado que exprima a usual relação "maior que", $\exists y\, M(y,x)$ exprime que existe um elemento no universo em questão que é maior que x (o que é verificado no universo em causa) mas $\exists y\, M(y, y+1)$ exprime que existe um elemento que é maior que o seu sucessor (o que não é verificado no universo em causa). Também aqui o "significado"da fórmula de partida é substancialmente diferente do "significado"da fórmula que se obtém após a substituição, o que não é, de novo, usualmente desejável nestas situações. O problema que aqui se verifica advém do facto de o termo (ou seja, $y+1$) que vai aparecer no lugar de x incluir a ocorrência de uma variável que vai ficar muda na fórmula obtida após a substituição. Assim, x é uma variável livre em $\exists y\, M(y,x)$ (não existindo assim qualquer relação entre x e a variável quantificada y) mas na fórmula obtida após substituição já não há variáveis livres (pois x foi substituída por um termo cuja variável passa a estar quantificada). De um modo geral, problemas semelhantes podem ocorrer quando no termo t pelo qual se vai substituir uma variável existem ocorrências de variáveis que vão ser "capturadas" por quantificadores, isto é, que vão ficar mudas na fórmula obtida após a substituição . Para impedir substituições deste tipo introduz-se a noção de "termo livre para variável numa fórmula".

Segue-se a definição de termo livre para variável numa fórmula. Encontram-se na literatura vários modos de definir esta noção. Neste texto adoptou-se uma definição próxima das apresentadas em [8] e [13].

Definição 3.2.21 Termo livre para variável numa fórmula
Para cada $\varphi \in F_\Sigma^X$, $t \in T_\Sigma^X$ e $x \in X$, o termo t diz-se *livre para x em φ* se alguma das condições seguintes é satisfeita

- $\varphi \in FA_\Sigma^X$ (i.e., φ é uma fórmula atómica);

[2] Para simplificar a exposição, em vez de usar a notação prefixa $+(t_1, t_2)$ para a função $+$(adição) usa-se aqui a notação infixa $t_1 + t_2$.

- φ é $\varphi' \to \varphi''$ ou $\varphi' \wedge \varphi''$ ou $\varphi' \vee \varphi''$ e t é livre para x em φ' e φ'';
- φ é $\forall x\, \varphi'$ ou $\exists x\, \varphi'$;
- φ é $\forall v\, \varphi'$ ou $\exists v\, \varphi'$, com $v \in X\backslash\{x\}$, $v \notin V(t)$ e t é livre para x em φ'. ■

De um ponto de vista informal, sempre que t seja livre para x em φ então ao fazer substituição de x por t em φ não existem variáveis de t (distintas de x) que venham a ser "capturadas"por quantificadores. Isto significa que para cada variável $y \in V(t)$ (i.e., para cada variável presente em t), o número de ocorrências mudas de y em φ e em φ_t^x é o mesmo.

Sejam φ uma fórmula, x uma variável e t um termo. O termo t é *sempre* livre para x em φ se φ for uma fórmula atómica (numa fórmula deste tipo não estão presentes quantificadores pelo que nenhuma variável de t poderá vir a ser "capturada"por um quantificador) ou se φ for uma fórmula do tipo $\forall x\, \varphi'$ ou $\exists x\, \varphi'$ (recorde-se que nestes casos a substituição não altera a fórmula φ). No caso de φ ser do tipo $\varphi' \to \varphi''$, $\varphi' \wedge \varphi''$ ou $\varphi' \vee \varphi''$ há que analisar o que acontece relativamente às subfórmulas φ' e φ''. O caso mais delicado é quando φ é do tipo $\forall v\, \varphi'$ ou $\exists v\, \varphi'$ onde v é uma variável distinta de x. Neste caso, para garantir que nenhuma variável de t venha a ser capturada pela quantificação sobre a variável v, exige-se que v não esteja presente no termo t e, naturalmente, que t também seja livre para x em φ'.

Exemplo 3.2.22 Tem-se que

– $s(y)$ não é livre para x em $\exists y\, M(y, x)$;

– $s(x)$ e $s(z)$ são livres para x em $\exists y\, M(y, x)$;

– $s(x)$, $s(y)$ e $s(z)$ são livres para y em $\exists y\, M(y, x)$;

– $q(x)$ é livre para x em $Q(x) \wedge (\forall y\, (Q(y) \to M(z, s(x))))$;

– $q(y)$ não é livre para x em $Q(x) \wedge (\forall y\, (Q(y) \to M(z, s(x))))$;

– $q(y)$ é livre para x em $Q(x) \wedge (\forall x\, (Q(x) \to M(z, s(y))))$;

– $q(z)$ não é livre para y em $\forall x\, (Q(x) \to (\forall z\, M(z, s(y))))$;

– $q(z)$ é livre para z em $\forall x\, (Q(x) \to (\forall z\, M(z, s(y))))$. ■

Observação 3.2.23 Sejam $\varphi \in F_\Sigma^X$, $t \in T_\Sigma^X$ e $x \in X$. Do que ficou exposto, nomeadamente das definições 3.2.19 e 3.2.21, resultam algumas observações importantes (muitas das quais foram já sendo referidas ao longo do texto). Dada a sua relevância listam-se seguidamente algumas delas.

- Ao fazer-se a substituição de x por t em φ só são efectivamente efectuadas substituições em ocorrências de x que sejam livres. Deste modo, em particular
  - $(\varphi)_t^x = \varphi$ se φ é fechada;
  - $(\forall x\, \varphi)_t^x = \varphi$ e $(\exists x\, \varphi)_t^x = \varphi$.
- O termo x é livre para x em φ.
- Se $V(t) = \emptyset$ (i.e., se em t não existem variáveis) então t é livre para qualquer variável em φ.
- Se $V(t) \cap VM(\varphi) = \emptyset$ (i.e., se as variáveis de t não têm ocorrências mudas em φ) então t é livre para qualquer variável em φ. ∎

Notação 3.2.24 Sejam $\varphi \in F_\Sigma^X$, $t \in T_\Sigma^X$ e $x \in X$. Usa-se

$$[\varphi]_t^x$$

para representar o resultado de substituir a variável x pelo termo t em φ seguindo a Definição 3.2.19 *com t termo livre para x em φ*. Assim, sempre que se usar esta notação está implícito que t tem de ser termo livre para x em φ. Se for claro, a partir do contexto que t é livre para x em φ, usa-se apenas $(\varphi)_t^x$ (ou φ_t^x).

3.3 Semântica

Nesta secção vão ser apresentados os aspectos semânticos da lógica de primeira ordem.

Uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$ introduz *símbolos* de função e de predicado, isto é, *nomes* de funções e de predicados. Esses símbolos (ou nomes) podem vir a ser interpretados de muitas formas diferentes, no sentido em que a cada um desses *nomes* se pode fazer corresponder uma certa função (total) ou predicado. Quando se faz corresponder a cada símbolo de função uma certa função e a cada símbolo de predicado um certo predicado está-se a definir uma *estrutura de interpretação.* As funções e predicados são definidos à custa de conjuntos, e portanto uma estrutura de interpretação inclui também um dado conjunto que constitui o domínio ou universo de interpretação. Recorde-se que um predicado Π de aridade n (ou n-ário), $n \in \mathbb{N}_0$, sobre um conjunto U é uma aplicação $\Pi : U^n \to \{0,1\}$ e que U^0 é um conjunto singular.

Definição 3.3.1 Estrutura de interpretação sobre assinatura de primeira ordem
Seja $\Sigma = (SF, SP)$, onde $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, uma assinatura de primeira ordem. Uma *estrutura de interpretação sobre* Σ é um par

$$\mathbb{M} = (U, I)$$

onde

- U é um conjunto não vazio designado por *universo* (*domínio* ou *suporte*) *da estrutura*;
- I é uma aplicação designada por *função de interpretação* que, a cada símbolo de Σ, associa uma aplicação do seguinte modo
  - para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $f \in SF_n$, $I(f)$ é uma aplicação
    $$I(f) : U^n \to U$$
  - para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $P \in SF_n$, $I(P)$ é uma aplicação
    $$I(P) : U^n \to \{0,1\}.$$ ∎

Notação 3.3.2 Seja $\mathbb{M} = (U, I)$ uma estrutura de interpretação sobre Σ.

- Para cada símbolo de função f de aridade 0, ou seja, para cada símbolo de constante f, $I(f)$ é uma aplicação que ao elemento do conjunto singular U^0 faz corresponder um elemento $u \in U$ (a interpretação do símbolo de constante f na estrutura de interpretação $\mathbb{M}$). É usual, nesta situação, escrever-se apenas $I(f)$ para denotar o elemento u.

De modo semelhante, para cada símbolo de predicado P de aridade 0, $I(P)$ denota um elemento de $\{0, 1\}$. Note-se que cada símbolo de predicado de aridade 0 pode ser visto assim como símbolo proposicional e I como uma valoração proposicional.

- Usam-se também as notações $f_{I\!M}$ e $P_{I\!M}$ para $I(f)$ e $I(P)$, respectivamente. ■

Exemplo 3.3.3 Considere-se a assinatura Σ apresentada no Exemplo 3.2.2. O par $I\!M = (\mathbb{Z}, I)$ onde, considerando as habituais operações de soma e multiplicação em $\mathbb{Z}$,

- $I(\odot) = 0$;
- $I(s) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $I(s)(n) = n + 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$;
- $I(q) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $I(q)(n) = n * n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$;
- $I(Q) : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ tal que $I(Q)(n) = 1$ se n é um quadrado perfeito (ou seja, se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k * k$) e $I(Q)(n) = 0$ caso contrário;
- $I(M) : \mathbb{Z}^2 \to \{0, 1\}$ tal que $I(M)(n_1, n_2) = 1$ se n_1 é maior que n_2 e $I(M)(n_1, n_2) = 0$ caso contrário,

é uma estrutura de interpretação sobre Σ. Neste caso faz-se corresponder ao símbolo de constante $\odot$ o inteiro 0, ao símbolo de função s a função sucessor, ao símbolo de função q a função que associa a cada inteiro o seu quadrado, ao símbolo de predicado Q o predicado "é quadrado perfeito"e ao símbolo de predicado M o predicado "é maior do que".

Tendo em conta a notação 3.3.2, poder-se-ia ter escrito

- $\odot_{I\!M} = 0$;
- $s_{I\!M} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $s_{I\!M}(n) = n + 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$,

e de modo semelhante para os restantes símbolos. Por ser mais simples, será esta a notação que se utilizará preferencialmente na sequência. ■

No que se segue assume-se fixada uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$ onde $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e um conjunto de variáveis X.

Apresenta-se seguidamente a semântica das fórmulas em F_Σ^X. A semântica das fórmulas depende da interpretação dos termos. Uma estrutura de interpretação só fixa uma interpretação para os símbolos de função e de predicado. Como para além de símbolos de função um termo pode conter variáveis, para interpretar um termo é necessário atribuir também um valor às variáveis. É assim necessário introduzir a noção de atribuição (de valores às variáveis).

Definição 3.3.4 ATRIBUIÇÃO
Seja $\mathbb{M} = (U, I)$ uma estrutura de interpretação sobre Σ. Uma *atribuição* de X em $\mathbb{M}$ é uma aplicação

$$\rho : X \to U$$

que associa a cada variável um elemento do universo U.

O conjunto de todas as atribuições de X em $\mathbb{M}$ denota-se por $ATR_{\mathbb{M}}^X$. Omitem-se as referências a $\mathbb{M}$ e/ou X sempre que seja claro a partir do contexto qual a estrutura de interpretação e qual o conjunto de variáveis em causa. ■

Para definir a semântica de fórmulas quantificadas é necessária a noção de atribuição x-equivalente seguinte.

Definição 3.3.5 ATRIBUIÇÃO x-EQUIVALENTE
Sejam $\mathbb{M} = (U, I)$ uma estrutura de interpretação sobre Σ, $\rho, \rho' \in ATR_{\mathbb{M}}$ e $x \in X$. Diz-se que a atribuição ρ *é x-equivalente a* ρ' se $\rho(v) = \rho'(v)$ para cada $v \in X \backslash \{x\}$.

Usa-se a notação $\rho[x := k]$ para a atribuição x-equivalente a ρ que atribui o valor k a x ■

Duas atribuições são x-equivalentes quando coincidem em todos os valores que atribuem às variáveis distintas de x. Quanto ao valor atribuído a x pode ser o mesmo (caso em que as duas atribuições são iguais) ou não.

Exemplo 3.3.6 Suponha-se que $x, y, z \in X$ e $\mathbb{M} = (\mathbb{Z}, I)$. Considerem-se as atribuições ρ_1, ρ_2 e ρ_3 em $\mathbb{M}$ tais que

- $\rho_1(x) = 10$, $\rho_1(y) = 20$, $\rho_1(z) = 30$;

- $\rho_2(x) = 10$, $\rho_2(y) = 5$, $\rho_2(z) = 30$;
- $\rho_3(x) = 1$, $\rho_3(y) = 20$, $\rho_3(z) = 3$;
- $\rho_1(v) = \rho_2(v) = \rho_3(v)$ para cada $v \in X\backslash\{x, y, z\}$.

Tem-se que ρ_2 é y-equivalente a ρ_1, mais precisamente $\rho_2 = \rho_1[y := 5]$, mas ρ_3 não é y-equivalente a ρ_1. ∎

Definição 3.3.7 Interpretação de termos
Seja $I\!M = (U, I)$ uma estrutura de interpretação sobre Σ e $\rho \in ATR_{I\!M}$. A *interpretação dos termos em* $I\!M$ *com* ρ é uma função

$$[\![.]\!]^{\rho}_{I\!M} : T^X_\Sigma \to U$$

definida indutivamente como se segue:

- $[\![x]\!]^{\rho}_{I\!M} = \rho(x)$ se $x \in X$;
- $[\![c]\!]^{\rho}_{I\!M} = c_{I\!M}$ se $c \in SF_0$;
- $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^{\rho}_{I\!M} = f_{I\!M}([\![t_1]\!]^{\rho}_{I\!M}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\rho}_{I\!M})$ se $f \in SF_n$, $t_1, \ldots, t_n \in T^X_\Sigma$ e $n > 0$. ∎

Da Definição 3.3.7 resulta que fixada uma estrutura de interpretação e uma atribuição nessa estrutura, a interpretação de cada termo é um valor do universo subjacente à estrutura de interpretação.

Exemplo 3.3.8 Considerem-se a estrutura de interpretação $I\!M = (\mathbb{Z}, I)$ apresentada no Exemplo 3.3.3 e, assumindo que $x, y, z \in X$, a atribuição $\rho \in ATR_{I\!M}$ tal que $\rho(x) = 1$, $\rho(y) = 2$ e $\rho(z) = 3$. Tem-se que

- $[\![\odot]\!]^{\rho}_{I\!M} = \odot_{I\!M} = 0$;
- $[\![x]\!]^{\rho}_{I\!M} = \rho(x) = 1$;
- $[\![s(\odot)]\!]^{\rho}_{I\!M} = s_{I\!M}([\![\odot]\!]^{\rho}_{I\!M}) = s_{I\!M}(0) = 1$;
- $[\![q(y)]\!]^{\rho}_{I\!M} = q_{I\!M}([\![y]\!]^{\rho}_{I\!M}) = q_{I\!M}(2) = 4$;

- $[\![s(q(z))]\!]^\rho_{I\!M} = s_{I\!M}(q_{I\!M}([\![z]\!]^\rho_{I\!M})) = s_{I\!M}(q_{I\!M}(3)) = 10.$ ■

Notação 3.3.9 A interpretação de termos fechados não depende da atribuição em causa (ver final da secção 3.3) e por isso, quando t é um termo fechado pode usar-se a notação $[\![t]\!]_{I\!M}$ para a interpretação do termo t em $I\!M$ com qualquer atribuição.

Definição 3.3.10 SATISFAÇÃO POR ESTRUTURA DE INTERPRETAÇÃO COM ATRIBUIÇÃO Seja $I\!M = (U, I)$ uma estrutura de interpretação sobre Σ e $\rho \in ATR_{I\!M}$. A noção de *satisfação de* $\varphi \in F^X_\Sigma$ *por* $I\!M$ *com* ρ denota-se por

$$I\!M, \rho \Vdash \varphi$$

e define-se indutivamente como se segue:

- $I\!M, \rho \Vdash P$ se $P_{I\!M} = 1$, para cada $P \in SP_0$;
- $I\!M, \rho \Vdash P(t_1, \ldots, t_n)$ se $P_{I\!M}([\![t_1]\!]^\rho_{I\!M}, \ldots, [\![t_n]\!]^\rho_{I\!M}) = 1$ com $P \in SP_n$, $t_1, \ldots, t_n \in T^X_\Sigma$ e $n > 0$;
- não $I\!M, \rho \Vdash \bot$;
- $I\!M, \rho \Vdash \varphi \to \varphi'$ se $I\!M, \rho \not\Vdash \varphi$ ou $I\!M, \rho \Vdash \varphi'$;
- $I\!M, \rho \Vdash \varphi \wedge \varphi'$ se $I\!M, \rho \Vdash \varphi$ e $I\!M, \rho \Vdash \varphi'$;
- $I\!M, \rho \Vdash \varphi \vee \varphi'$ se $I\!M, \rho \Vdash \varphi$ ou $I\!M, \rho \Vdash \varphi'$;
- $I\!M, \rho \Vdash \forall x\ \varphi$ se qualquer que seja $\rho' \in ATR_{I\!M}$ x-equivalente a ρ se tem $I\!M, \rho' \Vdash \varphi$;
- $I\!M, \rho \Vdash \exists x\ \varphi$ se existe $\rho' \in ATR_{I\!M}$ x-equivalente a ρ tal que $I\!M, \rho' \Vdash \varphi$.

Como é usual, pode utilizar-se $I\!M, \rho \not\Vdash \varphi$ sempre que não se tem $I\!M, \rho \Vdash \varphi$. Dado $\Phi \subseteq F^X_\Sigma$, $I\!M$ *com* ρ *satisfaz* Φ, o que se denota por

$$I\!M, \rho \Vdash \Phi$$

se $I\!M, \rho \Vdash \varphi$ para cada $\varphi \in \Phi$. ■

Observação 3.3.11 Uma forma alternativa (e equivalente) de definir a satisfação de fórmulas do tipo $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$ por uma estrutura de interpretação $I\!M = (U, I)$ com uma atribuição ρ é como se segue

- $I\!M, \rho \Vdash \forall x\ \varphi$ se $I\!M, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ qualquer que seja $u \in U$;
- $I\!M, \rho \Vdash \exists x\ \varphi$ se existe $u \in U$ tal que $I\!M, \rho[x := u] \Vdash \varphi$.

Definição 3.3.12 Satisfação por estrutura de interpretação
Seja $I\!M = (U, I)$ uma estrutura de interpretação sobre Σ. A noção de *satisfação de* $\varphi \in F_\Sigma^X$ *por* $I\!M$ denota-se por

$$I\!M \Vdash \varphi$$

e define-se como se segue: $I\!M \Vdash \varphi$ se para cada $\rho \in ATR_{I\!M}$ se tem que $I\!M, \rho \Vdash \varphi$. Neste caso diz-se que $I\!M$ *é modelo de* φ.

Dado $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$, $I\!M$ *satisfaz* Φ, o que se denota por

$$I\!M \Vdash \Phi$$

se $I\!M \Vdash \varphi$ para cada $\varphi \in \Phi$. Neste caso diz-se também que $I\!M$ *é modelo de* Φ. ∎

Observação 3.3.13 Como seria de esperar, sendo $\varphi \in F_\Sigma^X$, $I\!M$ uma qualquer estrutura de interpretação sobre Σ e $\rho \in ATR_{I\!M}$, das Definições 3.2.9, 3.3.10 e 3.3.12 resulta que $I\!M, \rho \Vdash \neg\varphi$ se e só se $I\!M, \rho \not\Vdash \varphi$. ∎

Exemplo 3.3.14 Considerem-se a estrutura de interpretação $I\!M = (\mathbb{Z}, I)$ apresentada no Exemplo 3.3.3, as fórmulas apresentadas no Exemplo 3.2.8 e, assumindo que $x, y, z \in X$, a atribuição $\rho \in ATR_{I\!M}$ tal que $\rho(x) = 1$, $\rho(y) = 2$ e $\rho(z) = 3$. Tem-se que

- $I\!M, \rho \Vdash Q(\odot)$ porque

  $$Q_{I\!M}([\![\odot]\!]^\rho_{I\!M}) = Q_{I\!M}(0) = 1$$

  pois 0 é um quadrado perfeito;

- $I\!M, \rho \not\Vdash M(x, y)$ porque

  $$M_{I\!M}([\![x]\!]^\rho_{I\!M}, [\![y]\!]^\rho_{I\!M}) = M_{I\!M}(1, 2) = 0$$

  pois 1 não é maior que 2;

- $I\!M, \rho \not\Vdash Q(s(x)) \wedge M(q(s(y)), s(x))$ porque
$$I\!M, \rho \not\Vdash Q(s(x))$$
uma vez que $Q_{I\!M}([\![s(x)]\!]^{\rho}_{I\!M}) = Q_{I\!M}(2) = 0$;
- $I\!M, \rho \not\Vdash \forall x\, Q(x)$ pois
$$I\!M, \rho[x := 5] \not\Vdash Q(x)$$
uma vez que
$$Q_{I\!M}([\![x]\!]^{\rho[x:=5]}_{I\!M}) = Q_{I\!M}(5) = 0$$
(usando directamente a noção de atribuição x-equivalente, dir-se-ia que $I\!M, \rho \not\Vdash \forall x\, Q(x)$ porque existe uma atribuição ρ', por exemplo $\rho' = \rho[x := 5]$, que é x-equivalente a ρ e tal que $I\!M, \rho' \not\Vdash Q(x)$);
- $I\!M, \rho \Vdash \exists z(M(z, \odot) \wedge Q(z))$ porque
$$I\!M, \rho[z := 4] \Vdash M(z, \odot) \wedge Q(z)$$
uma vez que
  - $I\!M, \rho[z := 4] \Vdash M(z, \odot)$ pois
$$M_{I\!M}([\![z]\!]^{\rho[z:=4]}_{I\!M}, [\![\odot]\!]^{\rho[z:=4]}_{I\!M}) = M_{I\!M}(4, 0) = 1$$
  - $I\!M, \rho[z := 4] \Vdash Q(z)$ pois $Q_{I\!M}([\![z]\!]^{\rho[z:=4]}_{I\!M}) = Q_{I\!M}(4) = 1$.

Tem-se também que

- $I\!M \Vdash \exists z(M(z, \odot) \wedge Q(z))$ pois $I\!M, \rho \Vdash \exists z(M(z, \odot) \wedge Q(z))$, para cada $\rho \in ATR_{I\!M}$;
- $I\!M \Vdash \forall x\, Q(q(x))$ pois $I\!M, \rho \Vdash \forall x\, Q(q(x))$, para cada $\rho \in ATR_{I\!M}$. ■

Observação 3.3.15 É importante salientar que da Definição 3.3.12 resulta que os valores que uma atribuição ρ associa às variáveis que só têm ocorrências mudas numa fórmula φ são *irrelevantes* para a satisfação de φ por $I\!M$ com ρ (este resultado é aliás enunciado no Lema 3.3.22). Em fórmulas do tipo $\forall x\, \varphi$ há que garantir a satisfação de φ por $I\!M$ com todas as atribuições x-equivalentes a ρ (e portanto o valor de $\rho(x)$

não é, por si só, relevante). Em fórmulas do tipo $\exists x\, \varphi$ há que garantir a satisfação de φ por $\mathbb{M}$ com alguma atribuição x-equivalente a ρ (e portanto o valor de $\rho(x)$ não é necessariamente relevante).

As variáveis mudas são apenas auxiliares da quantificação e poderão ser trocadas por outras (se certas condições forem respeitadas) sem que seja modificada a satisfação ou não satisfação por $\mathbb{M}$ com ρ.

Naturalmente que o mesmo já não se passa relativamente às variáveis livres. Considerando, por exemplo, a fórmula $M(x, y)$ do Exemplo 3.3.14, tinha-se que $\mathbb{M}, \rho \not\Vdash M(x, y)$ mas, se for considerada uma atribuição ρ' tal que $\rho(x) = 4$ e $\rho(y) = 2$ já se tem que $\mathbb{M}, \rho' \Vdash M(x, y)$.

Seguem-se as noções de fórmula possível e contraditória, de validade de fórmula, de consequência semântica e de fórmulas logicamente equivalentes.

Definição 3.3.16 Fórmula possível e contraditória
Seja $\varphi \in F_\Sigma^X$.

- φ diz-se *possível* se existe uma estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre Σ e $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ tal que $\mathbb{M}, \rho \Vdash \varphi$;
- φ diz-se *contraditória* (ou *impossível*) se não é possível.

Estas noções podem ser estendidas também a conjuntos de fórmulas: sendo $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$, Φ diz-se *possível* se existe uma estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre Σ e $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ tal que $\mathbb{M}, \rho \Vdash \Phi$ e diz-se *contraditório* (ou *impossível*) caso contrário. ∎

Definição 3.3.17 Validade de fórmula
A fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$ diz-se *válida*, o que se denota por

$$\models \varphi$$

se $\mathbb{M} \Vdash \varphi$ qualquer que seja a estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre Σ. ∎

Definição 3.3.18 Consequência semântica Sendo $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$, a fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$ *diz-se consequência semântica de* Φ, o que se denota por

$$\Phi \models \varphi$$

se para cada estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre Σ e cada $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$, se tem que

$$\text{se } \mathbb{M}, \rho \Vdash \Phi \text{ então } \mathbb{M}, \rho \Vdash \varphi. \qquad \blacksquare$$

Como se referiu no capítulo anterior, para, no âmbito da lógica proposicional, estabelecer $\Phi \models \varphi$ por via semântica, basta considerar apenas um número finito de estruturas de interpretação (valorações). Note-se que o caso da lógica de primeira ordem é completamente diferente. Para estabelecer $\Phi \models \varphi$ é necessário considerar todas as estruturas de interpretação $\mathbb{M} = (U, I)$ e todas as atribuições ρ em $\mathbb{M}$. Embora a satisfação de uma fórmula por $\mathbb{M}$ com ρ só dependa dos valores que ρ atribui a um número finito de variáveis (as variáveis livres da fórmula - ver Lema 3.3.22), como U pode ser um qualquer conjunto não vazio, infinito em particular, pode existir um número infinito de atribuições relevantes a considerar. Assim, estabelecer por via semântica $\Phi \models \varphi$, no âmbito da lógica de primeira ordem, é uma tarefa com um carácter infinitário, por constraste com o carácter finitário de idêntica tarefa no caso proposicional.

Observação 3.3.19 Em certos autores encontra-se também uma outra noção de consequência semântica, a qual tem algumas propriedades diferentes da noção apresentada na Definição 3.3.18. Essa outra definição é a seguinte: sendo $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$, a fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$ diz-se consequência semântica de Φ se para cada estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre Σ se tem que se $\mathbb{M} \Vdash \Phi$ então $\mathbb{M} \Vdash \varphi$. Esta noção é por vezes designada consequência *global* e a apresentada na Definição 3.3.18 consequência *local*.

A noção de consequência semântica que vai ser relevante para, nomeadamente, a prova da correcção do sistema de dedução natural que se apresentará ulteriormente, é a descrita na Definição 3.3.18 e portanto é esta a noção que se utilizará no que segue. $\blacksquare$

Exemplo 3.3.20 Considerando a assinatura apresentada no exemplo 3.2.2 tem-se que

- $\models \forall x(Q(x) \vee (\neg Q(x)))$, ou seja, $\forall x(Q(x) \vee (\neg Q(x)))$ é uma fórmula válida;
- $\not\models \forall x\, Q(x)$, ou seja, $\forall x\, Q(x)$ não é uma fórmula válida;
- $\{\exists x(\forall y\, M(x, y))\} \models \forall x(\exists y\, M(x, y))\}$, ou seja, $\forall x(\exists y\, M(x, y))$ é consequência semântica de $\{\exists x(\forall y\, M(x, y))\}$;
- $\{M(x, y))\} \not\models \forall x\, M(x, y)\}$, ou seja, $\forall x\, M(x, y)$ não é consequência semântica de $\{M(x, y)\}$. $\blacksquare$

Definição 3.3.21 FÓRMULAS LOGICAMENTE EQUIVALENTES
As fórmulas $\varphi, \varphi' \in F_\Sigma^X$ dizem-se *logicamente equivalentes*, o que se denota por $\varphi \simeq \varphi'$, se $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$. ■

Seguem-se alguns resultados e algumas noções que serão úteis em secções ulteriores. As provas deixam-se como exercício ao leitor. Muitas das provas decorrem por indução no conjunto dos termos e/ou das fórmulas. O leitor interessado pode encontrar algumas das provas em, por exemplo, [8].

Considere-se fixada uma estrutura de interpretação $\mathbb{M} = (U, I)$ sobre Σ.

Lema 3.3.22
Para cada $t \in T_\Sigma^X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$

(i) $[\![t]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = [\![t]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho'}$ sendo $\rho, \rho' \in ATR_{\mathbb{M}}$ tais que $\rho(x) = \rho'(x)$ para cada $x \in V(t)$;

(ii) $\mathbb{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathbb{M}, \rho' \Vdash \varphi$ sendo $\rho, \rho' \in ATR_{\mathbb{M}}$ tais que $\rho(x) = \rho'(x)$ para cada $x \in VL(\varphi)$. ■

O resultado anterior mostra que a satisfação de uma fórmula por uma estrutura de interpretação com uma dada atribuição só depende dos valores que a atribuição dá às variáveis livres da fórmula. Consequentemente, como corolário, tem-se que se a fórmula não tem variáveis livres (isto é, é fórmula fechada) então, a satisfação é independente da atribuição o que significa que se for satisfeita por uma estrutura de interpretação com uma certa atribuição então a estrutura de interpretação é modelo da fórmula.

Corolário 3.3.23
Sejam $t \in T_\Sigma^X$ um termo fechado e $\varphi \in F_\Sigma^X$ uma fórmula fechada.

1. $[\![t]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = [\![t]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho'}$ quaisquer que sejam $\rho, \rho' \in ATR_{\mathbb{M}}$.

2. $\mathbb{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathbb{M}, \rho' \Vdash \varphi$ quaisquer que sejam $\rho, \rho' \in ATR_{\mathbb{M}}$; consequentemente, para cada $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$, $\mathbb{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathbb{M} \Vdash \varphi$.

3. $\mathbb{M} \Vdash \varphi$ ou $\mathbb{M} \Vdash \neg\varphi$. ■

Existem muitas situações em que se torna conveniente modificar o nome das variáveis de uma fórmula. As alíneas (i) e (ii) do Lema 3.3.24 mostram que tal operação não introduz restrições relevantes, dado que para cada fórmula é sempre possível arranjar uma fórmula logicamente equivalente à primeira em que o nome das variáveis mudas é diferente.

Lema 3.3.24
Sendo $\varphi \in F_\Sigma^X$ tem-se que

(i) $\models \forall x\, \varphi \leftrightarrow \forall y\, \varphi_y^x$
para cada $y \notin VL(\varphi)\backslash\{x\}$ que seja livre para x em φ;

(ii) $\models \exists x\, \varphi \leftrightarrow \exists y\, \varphi_y^x$
para cada $y \notin VL(\varphi)\backslash\{x\}$ que seja livre para x em φ. ■

Como se viu atrás, a substituição de variáveis por termos tem geralmente de ser feita com certo cuidado para evitar algumas consequências indesejáveis. Por este motivo foi então introduzida a noção de termo livre para variável numa fórmula. Certos autores não introduzem esta noção mas em vez disso assumem que quando é feita uma substituição se procede a uma mudança de nomes das variáveis mudas da fórmula envolvida que podem causar problemas. Tendo em conta o que foi referido no parágrafo anterior, esta mudança não introduz restrições significativas.

Seguem-se mais alguns Lemas que serão utilizados na sequência.

Lema 3.3.25
Sendo $\varphi \in F_\Sigma^X$ tem-se que

(i) $I\!M \Vdash \varphi$ se e só se $I\!M \Vdash \forall x\, \varphi$ onde $x \in X$;

(ii) $I\!M \Vdash \varphi$ se e só se $I\!M \Vdash Fch(\varphi)$
onde $Fch(\varphi)$ é fecho universal de φ. ■

Lema 3.3.26

1. Para cada $t \in T_\Sigma^X$, $x, y \in X$ tais que $y \notin V(t)\backslash\{x\}$, $\rho \in ATR_{I\!M}$ e $u \in U$

$$[\![t]\!]_{I\!M}^{\rho[x:=u]} = [\![t_y^x]\!]_{I\!M}^{\rho[y:=u]}.$$

2. Para cada $\varphi \in F_\Sigma^X$, $x, y \in X$ tais que y é livre para x em φ e $y \notin VL(\varphi) \backslash \{x\}$, $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ e $u \in U$

$$\mathbb{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \text{ se e só se } \mathbb{M}, \rho[y := u] \Vdash \varphi_y^x. \qquad \blacksquare$$

Lema 3.3.27

1. Para cada $t \in T_\Sigma^X$, $x \in X$, $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ e $u \in U$

$$[\![t]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x:=u]} = [\![t_r^x]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho}$$

   com $r \in T_\Sigma^X$ tal que $[\![r]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = u$.

2. Para cada $\varphi \in F_\Sigma^X$, $x \in X$, $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ e $u \in U$

$$\mathbb{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \text{ se e só se } \mathbb{M}, \rho \Vdash \varphi_t^x.$$

   com $t \in T_\Sigma^X$ tal que $[\![t]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = u$ e t é livre para x em φ. $\blacksquare$

Corolário 3.3.28
Sendo $\varphi \in F_\Sigma^X$ tem-se que

(i) $\models \varphi_t^x \rightarrow \exists x\, \varphi$
para cada $t \in T_\Sigma^X$ que seja livre para x em φ;

(ii) $\models \forall x\, \varphi \rightarrow \varphi_t^x$
para cada $t \in T_\Sigma^X$ que seja livre para x em φ. $\blacksquare$

Corolário 3.3.29
Se $\mathbb{M} = (U, I)$ é tal que para cada $u \in U$ existe um termo fechado $t_u \in T_\Sigma^X$ tal que $[\![t_u]\!]_{\mathbb{M}} = u$ então, para cada $\varphi \in F_\Sigma^X$ e $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ tem-se que $\mathbb{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi$ se e só se, para cada $u \in U$, $\mathbb{M}, \rho \Vdash \varphi_{t_u}^x$. $\blacksquare$

Proposição 3.3.30
Se todos os subconjuntos finitos de $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$ são possíveis então Φ é possível. $\blacksquare$

O resultado enunciado na Proposição 3.3.30 é usualmente designado por teorema da compacidade. A prova não é trivial e as apresentadas por vários autores recorrem frequentemente a resultados que envolvem propriedades de sistemas dedutivos para a lógica de primeira ordem. Mas também existem provas envolvendo apenas conceitos semânticos. Em [2] pode encontrar-se uma tal prova. Uma consequência deste resultado é o enunciado na Proposição 3.3.31.

Proposição 3.3.31
Sejam $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$. Se $\Phi \models \varphi$ então existe um subconjunto finito Φ_0 de Φ tal que $\Phi_0 \models \varphi$. ■

Exercícios

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos nesta secção.

Exercício 3.3.32 Na sequência P, Q, R e S designam símbolos de predicado e a é uma constante. Considere as asserções seguintes e indique as que são verdadeiras:

1. $\{\forall x(P(x) \to (\neg Q(x))), P(a)\} \models \neg Q(a)$
2. $\{(\forall x\, Q(x)) \to (\forall x\, R(x))\} \models \forall x\,(Q(x) \to R(x))$
3. $\{\forall x\,(Q(x) \to R(x))\} \models (\forall x\, Q(x)) \to (\forall x\, R(x))$
4. $\{\forall x\,(Q(x) \vee R(x))\} \models (\forall x\, Q(x)) \vee (\forall x\, R(x))$
5. $\{\exists x\,(Q(x) \vee R(x))\} \models (\exists x\, Q(x)) \vee (\exists x\, R(x))$
6. $\{(\exists x\, Q(x)) \wedge (\exists x\, R(x))\} \models \exists x\,(Q(x) \wedge R(x))$
7. $\{(\forall x\, Q(x)) \wedge (\forall\, R(x))\} \models \forall x\,(Q(x) \wedge R(x))$
8. $\models (\forall y(\exists x\, P(x,y))) \to (\exists x(\forall y\, P(x,y)))$
9. $\models (\exists x(\forall y\, P(x,y))) \to (\forall y(\exists x\, P(x,y)))$ ■

3.4 Sistema dedutivo $\mathcal{N}_c$

Nesta secção apresenta-se um sistema de dedução natural para a lógica de primeira ordem (clássica): o sistema dedutivo $\mathcal{N}_c$. Como se verá, este sistema é uma extensão do sistema de dedução natural apresentado para o caso da lógica proposicional.

Tal como no caso da lógica proposicional, na subsecção 3.4.1 é feita uma apresentação do sistema dedutivo do modo mais ou menos informal que é usual encontrar na literatura, descrevendo-se os aspectos essenciais do sistema $\mathcal{N}_c$. O leitor interessado numa descrição mais precisa pode consultar a subsecção 3.4.2. As provas de correcção e completude do sistema encontram-se nas secções 3.4.3 e 3.4.3.2.

Tal como no caso do sistema $\mathcal{N}_p$, a construção de derivações em $\mathcal{N}_c$ pode ser efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*. Este assunto é abordado na capítulo **??**.

3.4.1 O sistema de dedução natural $\mathcal{N}_c$

Na apresentação do sistema dedutivo $\mathcal{N}_c$ que se segue, e tal como aconteceu no caso do sistema $\mathcal{N}_p$, optou-se por começar por fazer uma descrição gradual do sistema através de diversos exemplos com o propósito de ir ilustrando de uma forma progressiva os aspectos mais relevantes deste sistema dedutivo.

Tal como no sistema $\mathcal{N}_p$, também neste caso vão ser construídas árvores de dedução ou derivação as quais são muito semelhantes às construídas no âmbito de $\mathcal{N}_p$. O sistema $\mathcal{N}_c$ pode ser visto como uma extensão do sistema $\mathcal{N}_p$, no sentido em que todas as regras de inferência de $\mathcal{N}_p$ estão também presentes em $\mathcal{N}_c$, mas este inclui também regras de introdução e eliminação relativas aos quantificadores. Todas as noções referidas no contexto de $\mathcal{N}_p$ como, por exemplo, as noções de conclusão de árvore de dedução, hipótese aberta, hipótese fechada, eliminação de hipóteses, etc., são mantidas, como é natural, no âmbito deste novo sistema.

Apresentam-se seguidamente alguns exemplos ilustrativos. Começa-se por ilustrar a regra da eliminação do quantificador universal.

Exemplo 3.4.1 A árvore

$$\dfrac{\forall\, x(P(x) \to Q(x))^{\,1}}{P(a) \to Q(a)}\,\forall E \qquad\qquad P(a)^{\,2}$$

$$\frac{}{Q(a)} \to E$$

é uma árvore de dedução (ou derivação) em $\mathcal{N}_c$. É uma derivação de $Q(a)$ (a conclusão da árvore) a partir do conjunto $\{\forall\, x(P(x) \to Q(x)), P(a)\}$ (o conjunto das hipóteses abertas) onde se assume que a é uma constante. Ilustra a aplicação da regra $\forall E$, "eliminação do quantificador universal". Facilmente se compreende a ideia subjacente à aplicação da regra: se todas as entidades possuem uma dada propriedade então qualquer entidade em particular a possuirá também. ∎

Regra $\forall E$ (eliminação do quantificador universal)

A regra $\forall E$ permite obter uma derivação de $[\varphi]^x_t$ a partir de uma derivação de $\forall x\, \varphi$ onde t é um qualquer termo (livre para x em φ). Naturalmente, t pode ser em particular a própria variável x. A regra é usualmente representada do seguinte modo

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \forall x\ \varphi\end{array}}{[\varphi]^{\,x}_{\,t}}\ \forall E$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado. ∇

No próximo exemplo ilustra-se a regra da introdução do quantificador existencial.

Exemplo 3.4.2 A árvore

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall\, x(P(x) \to Q(x))^{\,1}}{P(a) \to Q(a)}\ \forall E \qquad P(a)^{\,2}}{Q(a)} \to E}{\exists x\, Q(x)}\ \exists I$$

é uma árvore de dedução em $\mathcal{N}_c$. É uma derivação de $\exists x\, Q(x)$ a partir do conjunto $\{\forall\, x(P(x) \to Q(x)), P(a)\}$ continuando a assumir que a é uma constante. Ilustra a aplicação da regra $\exists I$, "introdução do quantificador existencial". O raciocínio subjacente a esta regra é também simples: se se sabe que uma entidade possui um dada propriedade pode afirmar-se que existe uma entidade que possui essa propriedade. ■

Regra $\exists I$ (introdução do quantificador existencial)

A regra $\exists I$ permite obter uma derivação de $\exists x\, \varphi$ a partir de uma derivação de $[\varphi]^x_t$ onde t é um qualquer termo (livre para x em φ). Também neste caso, como é natural, t pode ser em particular a própria variável x. A regra é usualmente representada do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ [\varphi]^{\,x}_{\,t}\end{array}}{\exists x\, \varphi}\ \exists I$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado. ∇

Os próximos exemplos ilustram a regra de introdução do quantificador universal.

Exemplo 3.4.3 A árvore d_1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall\, y(P(y) \to Q(y))^{\,1}}{P(x) \to Q(x)}\ \forall E \qquad \dfrac{\forall\, yP(y)^{\,2}}{P(x)}\ \forall E}{Q(x)}\ \to E}{\forall x\, Q(x)}\ \forall I$$

é uma derivação de $\forall x\, Q(x)$ a partir do conjunto $\{\forall\, y(P(y) \to Q(y)), \forall y\, P(y)\}$. Ilustra a aplicação da regra $\forall I$, "introdução do quantificador universal". Como o nome da regra indica, a aplicação desta regra consiste na introdução de um quantificador universal. A questão que se coloca é a de saber em que condições faz sentido poder quantificar universalmente uma variável.

A ideia subjacente a esta regra está relacionada com o modo como habitualmente se estabelecem asserções em que se afirma que todas as entidades de um dado universo têm uma determinada propriedade (assumindo, eventualmente, certas condições adicionais). Nestes casos, o procedimento usual é considerar uma entidade arbitrária desse universo e conseguir concluir que verifica a propriedade pretendida. Como a entidade escolhida é uma entidade arbitrária do universo, faz sentido poder concluir então que todas as entidades desse universo verificam a propriedade.

Voltando à derivação apresentada no início tem-se que a árvore d_2

$$\dfrac{\dfrac{\forall\, y(P(y) \to Q(y))^{\,1}}{P(x) \to Q(x)}\;\forall E \qquad \dfrac{\forall\, yP(y)^{\,2}}{P(x)}\;\forall E}{Q(x)}\;\to E$$

é uma derivação de $Q(x)$ a partir do conjunto $\{\forall\, y(P(y) \to Q(y)), \forall y\, P(y)\}$. Informalmente, $Q(x)$ significa que a entidade que x possa representar tem a propriedade representada pelo predicado Q. Para se poder introduzir o quantificador universal quantificando a variável x (isto é, para se poder concluir que todos as entidades verificam o predicado representado por Q) há que garantir que x representa uma entidade arbitrária. O modo como no âmbito deste sistema dedutivo se assegura essa arbitrariedade está relacionado com o modo como x ocorre nas hipóteses abertas da árvore de dedução. Note-se que, neste caso, x não ocorre nas hipóteses abertas, logo não há nenhumas restrições impostas sobre as entidades que x possa representar, pelo que fará sentido dizer que x pode representar uma entidade arbitrária.

Considerando agora a árvore d_3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall\, x(P(x) \to Q(x))^{\,1}}{P(x) \to Q(x)}\;\forall E \qquad \dfrac{\forall\, xP(x)^{\,2}}{P(x)}\;\forall E}{Q(x)}\;\to E}{\forall x\, Q(x)}\;\forall I$$

ela constitui uma derivação de $\forall x\, Q(x)$ a partir do conjunto $\{\forall\, x(P(x) \to Q(x)), \forall x\, P(x)\}$. Neste caso x ocorre nas hipóteses abertas, mas também nesta situação faz sentido pensar que x representa uma entidade arbitrária. De facto, x apenas ocorre *muda* nas hipóteses e, como se sabe (ver secção 3.3), a satisfação de uma fórmula não depende das entidades que as variáveis mudas representam.

A árvore d_4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall\, y(P(y) \to Q(y))^1}{P(x) \to Q(x)}\,\forall E \qquad P(x)^2}{Q(x)}\to E}{\forall x\, Q(x)}\,\forall I$$

não é uma árvore de dedução de $\mathcal{N}_c$. Intuitivamente, não faz sentido concluir que todos as entidades verificam o predicado representado por Q a partir do conhecimento de que (a) todos as entidades que verificam o predicado representado por P também verificam o representado por Q e (b) *uma* entidade (aqui representada por x) verifica o predicado representado por P. A regra $\forall I$ foi aplicada numa situação incorrecta, pois não se pode garantir que a entidade que verifica o predicado representado por Q na fórmula $Q(x)$ é arbitrário. Ele é apenas *a* entidade que $P(x)$ garante que verifica o predicado representado por P, dado que x ocorre livre em $P(x)$.

Do que ficou exposto resulta então que a regra $\forall I$ permite obter uma derivação de $\forall x\, \varphi$ a partir de uma derivação de φ assumindo que *x não ocorre livre nas hipóteses abertas da árvore de dedução* o que é usualmente representado por

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}}{\forall x\ \varphi}\,\forall I$$

Na realidade esta é uma versão simplificada da regra $\forall x\, \varphi$. Mais adiante apresentar-se-á a versão mais geral. ∎

Exemplo 3.4.4 Neste exemplo apresenta-se mais uma árvore de dedução de $\mathcal{N}_c$. Esta derivação pretende ilustrar um caso em que a variável que é quantificada universalmente por aplicação da regra $\forall I$ pode ocorrer livre nas hipóteses *fechadas*.

A árvore

$$\cfrac{\neg(\forall x P(x))^{1} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\exists x(\neg P(x))^{2} \qquad \cfrac{\neg P(x)^{3}}{\exists x(\neg P(x))}\ \exists I}{\perp}\ \to E}{P(x)}\ \perp,3}{\forall x P(x)}\ \forall I}{\cfrac{\perp}{\exists x(\neg P(x))}\ \perp,2}\ \to E$$

é uma derivação de $\exists x(\neg P(x))$ a partir do conjunto $\{\neg(\forall x P(x))\}$. Neste caso x ocorre livre na hipótese fechada $\neg P(x)$. Note-se que esta hipótese foi utilizada apenas no âmbito de uma "prova por absurdo" que conduziu à aplicação da regra $\perp$ para concluir $P(x)$ a partir $\neg\exists x(\neg P(x))$. No momento da aplicação da regra $\forall I$, a fórmula $P(x)$ exprime, efectivamente, que a propriedade representada por P é verificada por uma entidade arbitrária representada por x (este facto é naturalmente uma consequência da hipótese $\neg\exists x(\neg P(x))$). ■

Exemplo 3.4.5 Neste exemplo apresenta-se mais uma árvore de dedução de $\mathcal{N}_c$ com a qual se pretende ilustrar a versão mais geral da regra $\forall I$. A árvore

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall z(\forall w P(z,w))^{1}}{\forall w P(w',w)}\ \forall E}{P(w',z)}\ \forall E}{\forall z P(w',z) \quad (= [\forall z P(w,z)]^{w}_{w'})}\ \forall I}{\forall w(\forall z P(w,z))}\ \forall I$$

é uma derivação de $\forall w(\forall z P(w,z))$ a partir do conjunto $\{\forall z(\forall w P(z,w))\}$. Quando se chega a $\forall z P(w',z)$, tem-se que w' é uma variável que não ocorre nas hipóteses abertas da árvore (representa uma entidade arbitrária) e portanto seria possível aplicar a regra $\forall I$ quantificando universalmente w'. No entanto, se se pretende obter $\forall w(\forall z P(w,z))$ (ou seja, usar w em vez de w' como variável universalmente quantificada) tal não é possível utilizando a regra $\forall I$ tal como apresentada até aqui. No entanto, faz sentido dizer que quando se verifica $\forall z P(w',z)$ com w' arbitrário também se verifica $\forall z P(w,z)$ com w arbitrário (note-se que w não ocorre livre nas hipóteses abertas) e portanto há que poder concluir $\forall w(\forall z P(w,z))$ nestas circunstâncias. Note-se que não é possível usar logo w no início, quando se aplica a regra $\forall E$ para obter $\forall w P(w',w)$, pois w não é termo livre para z em $\forall w P(z,w)$.

Como se disse, a situação acima descrita corresponde à aplicação da versão mais geral da regra $\forall I$. Esta versão consiste em obter uma derivação de $\forall x\, \varphi$, não apenas a partir de uma derivação de φ, mas podendo ser também a partir de uma derivação de $[\varphi]_y^x$ assumindo que y não ocorre livre nas hipóteses abertas da árvore de dedução de $[\varphi]_y^x$ (sendo ainda necessário um outro requisito que se ilustra no seguimento). ■

No exemplo que se segue ilustra-se uma situação relacionada com mais um requisito sobre variáveis que é exigido na aplicação da regra $\forall I$.

Exemplo 3.4.6 A árvore

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y \geq (y,y)^{\,1}}{\geq (y,y)}\,\forall E \qquad (= [\geq (x,y)]_y^x)}{\forall x \geq (x,y)}\,\forall I}{\exists y(\forall x \geq (x,y))}\,\exists I$$

não é uma árvore de dedução do sistema dedutivo $\mathcal{N}_c$. A regra $\forall I$ foi *incorrectamente* aplicada. Com efeito, $\geq (y,y)$ é $[\geq (x,y)]_y^x$ e, portanto, de acordo com o que acima foi referido, para se poder aplicar a regra $\forall I$ e obter $\forall x \geq (x,y)$ é necessário que (i) y não ocorra livre nas hipóteses abertas da derivação de $[\geq (x,y)]_y^x$ e (ii) y não ocorra livre em $\geq (x,y)$, pois, neste caso, $x \neq y$. No exemplo apresentado, a condição (i) é verificada mas a condição (ii) não o é.

Note-se que se se interpretarem estas fórmulas numa estrutura de interpretação cujo o universo seja, por exemplo, o conjunto dos inteiros e o predicado $\geq$ tiver a interpretação usual "maior ou igual que", a derivação acima corresponderia ao seguinte raciocínio (incorrecto): "como qualquer número inteiro é maior ou igual que si próprio então existe um inteiro tal que todos os outros inteiros são maiores ou iguais a ele". ∎

Regra $\forall I$ (introdução do quantificador universal)

A regra $\forall I$ permite obter uma derivação de $\forall x\, \varphi$ a partir de uma derivação de $[\varphi]^x_y$ tal que: (i) y não ocorre livre nas hipóteses abertas da árvore de dedução de $[\varphi]^x_y$ e (ii) se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ. A regra é usualmente representada do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ [\varphi]^{\,x}_{\,y}\end{array}}{\forall x\ \varphi}\ \forall I$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado e se assumem os requisitos referidos. ∇

Finalmente, neste último exemplo, ilustra-se a regra da eliminação do quantificador existencial.

Exemplo 3.4.7 Este exemplo pretende ilustrar uma última regra do sistema $\mathcal{N}_c$: a regra $\exists E$, "eliminação do quantificador existencial". A árvore d_1

$$\dfrac{\exists x A(x)^{\,1} \qquad \dfrac{A(y)^{\,2} \qquad \dfrac{\forall x(A(x) \to P)^{\,3}}{A(y) \to P}\ \forall E}{P}\ {\to}E}{P}\ \exists E, 2$$

é uma derivação de P (predicado 0-ário) a partir do conjunto de hipóteses $\{\exists x A(x), \forall x(A(x) \to P)\}$. Utiliza a regra $\exists E$. Como facilmente se percebe, esta regra permite eliminação de hipóteses.

A ideia subjacente à aplicação desta regra é a seguinte. Seja uma dada asserção α que representa o seguinte tipo de informação: sabe-se que existe uma certa entidade que verifica uma determinada propriedade não se sabendo, no entanto, identificar exactamente qual é a entidade. Suponha-se que usando esta informação (e, eventualmente, outras informações adicionais) se pretende estabelecer uma dada asserção β. Nesta situação, ter-se-á de atribuir temporariamente uma identificação arbitrária à entidade em causa para ser possível utilizar a informação para estabelecer β. Naturalmente, há que ter algum cuidado na representação que se escolhe para a tal entidade pois, para que possa ser considerado arbitrária, nada se pode assumir sobre ela (para além de verificar a propriedade referida). Por outro lado, a asserção β que se pretende concluir não poderá, obviamente, depender da particular representação escolhida.

Voltando ao exemplo apresentado no início, tem-se que $\exists x A(x)$ representa precisamente a existência de uma entidade que verifica o predicado representado por A, não se identificando exactamente a entidade (a variável x é muda). Para facilitar a compreensão podem interpretar-se as fórmulas envolvidas do seguinte modo: $\exists x A(x)$ representa a informação “um passageiro (não identificado) accionou o alarme do comboio”, P representa a informação “o comboio pára”e, naturalmente, $\forall x(A(x) \to P)$ representa a informação “sempre que passageiro acciona o alarme do comboio este pára”. É claramente um raciocínio válido concluir que o comboio pára partindo do facto de se saber que um passageiro accionou o alarme do comboio e do facto de assumir que sempre que um passageiro acciona o alarme do comboio este pára.

A árvore d_2

$$\dfrac{A(y)^{\,2} \qquad \dfrac{\forall x(A(x) \to P)^{\,3}}{A(y) \to P}\,\forall E}{P}\,\to E$$

é precisamente uma derivação de P a partir de $A(y)$ (e da hipótese adicional $\forall x(A(x) \to P)$), ou seja, uma derivação na qual com a fórmula $A(y)$ se representa o facto de existir uma entidade que verifica a propriedade associada a A e se lhe atribuir uma identificação (através da variável y). Para se concluir P a partir de d_2 e de $\exists x A(x)$ (e portanto aplicar a regra $\exists E$ para obter a árvore inicial d_1), há que garantir que a identificação temporariamente atribuída à entidade é tal que possa garantir a arbitrariedade deste. Esta é uma situação semelhante à que ocorre no caso da regra $\forall I$ e, tal como nesse caso, a arbitrariedade é garantida se: (a) a variável y não ocorrer nas hipóteses abertas de d_2 (distintas de $A(y)$) ou (b) a variável y apenas ocorrer *muda* nas hipóteses abertas de d_2 (distintas de $A(y)$). Neste caso, a condição (a) é satisfeita. A condição (b) revela que, neste exemplo, também se poderia ter utilizado a fórmula $A(x)$ (ou seja, poder-se-ia considerar $y = x$).

Existe ainda um outro requisito que tem de ser verificado: a variável y (que identifica temporariamente a entidade que verifica a propriedade associada a A), se for distinta de x, não pode ocorrer livre na fórmula $A(x)$ (isto é, a fórmula que é existencialmente quantificada). Este requisito é semelhante a uma situação que já aparecia no caso da regra $\forall I$.

Um último requisito que deve ser observado é o facto de a asserção que se pretende concluir não poder depender da identificação atribuída à entidade, isto é, neste caso P não poderia depender de y. Mais rigorosamente, o que isto significa é que y não pode ocorrer livre em P (ou seja, ou não ocorre ou ocorre como variável muda). Como é evidente, esta condição é satisfeita neste exemplo.

A aplicação da regra $\exists E$ conduz naturalmente à eliminação da hipótese $A(y)$, isto é, da fórmula que identifica temporária e arbitrariamente a entidade cuja existência é garantida pela fórmula $\exists x A(x)$. A eliminação processa-se da forma habitual, através das marcas. À semelhança do que acontecia na regra $\vee E$, a marca envolvida na aplicação desta regra tem de ser a marca de hipóteses associadas à fórmula $A(y)$, ou então uma marca nova e, ao aplicar a regra, apenas poderão ser eliminadas hipóteses $A(y)$ na árvore d_2. ■

<u>Regra $\exists E$</u> (eliminação do quantificador existencial)

A regra $\exists E$ permite obter uma derivação de ψ a partir de (a) uma derivação de $\exists x \varphi$ e de (b) uma derivação de ψ a partir de um conjunto de hipóteses contendo (eventualmente) $[\varphi]_y^x$, tais que: (i) y não ocorre livre nas hipóteses abertas da derivação de ψ distintas de $[\varphi]_y^x$, (ii) se $y \neq x$ então y não ocorre livre em φ e (iii) y não ocorre livre em ψ. Esta situação é usualmente representada do seguinte modo

$$[[\varphi]_y^x]^m$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \exists x\ \varphi & \psi\end{array}}{\psi}\ \exists E, m$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado e se assumem os requisitos indicados. Associada à aplicação desta regra está a marca m a qual, pelas razões acima referidas, deve garantir que na árvore que vai construída só se tornarão fechadas hipóteses de $\mathcal{D}_2$ correspondentes à fórmula $[\varphi]_y^x$ (ou seja, à fórmula que, na derivação de ψ, identifica temporariamente a entidade cuja existência é garantida por $\exists x\ \varphi$). Se a fórmula $[\varphi]_y^x$ também pertencer à s hipóteses abertas de $\mathcal{D}_1$, estas terão de permanecer abertas após a aplicação da regra. ∇

Para terminar, note-se que existem certas semelhanças entre a regra $\exists E$ e a regra $\vee E$, em particular na questão da eliminação das hipóteses. Com efeito, pode ver-se a regra $\exists E$ como uma generalização da regra $\vee E$. Na regra $\vee E$, existiam duas subderivações de uma mesma fórmula ψ: uma para cada uma dos dois casos que era necessário analisar. No caso da regra $\exists E$ pode-se pensar que se poderia ter uma subderivação de ψ associada a cada entidade do universo, isto é, assumindo em cada subderivação que é esse a entidade que satisfaz a propriedade φ. Essas subderivações são, na realidade, representadas conjuntamente na derivação de ψ a partir de $[\varphi]_y^x$ quando y verifica os requisitos indicados.

Seguem-se mais alguns exemplos de deduções em $\mathcal{N}_c$.

Exemplo 3.4.8

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\forall y(P(x,y) \to P(y,x)))^1}{\forall y(P(v,y) \to P(y,v))}\ \forall E}{P(v,w) \to P(w,v)}\ \forall E \qquad P(v,w)^2}{P(w,v)}\ \to E \qquad P(v,w)^2}{P(v,w) \wedge P(w,v)}\ \wedge I \qquad \forall x\,(\exists y\, P(x,y))^3$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\quad}{\exists y(P(v,y)\wedge P(y,v))}\,\exists I \qquad \dfrac{\quad}{\exists y P(v,y)}\,\forall E}{\exists y(P(v,y)\wedge P(y,v))}\,\exists E,2}{\forall x(\exists y(P(x,y)\wedge P(y,x)))}\,\forall I$$

A conclusão da derivação é $\forall x(\exists y(P(x,y)\wedge P(y,x)))$ e o conjunto das hipóteses abertas é $\{\forall x(\forall y(P(x,y)\to P(y,x))), \forall x\,(\exists y\, P(x,y))\}$. Note-se que na aplicação da regra $\exists E$, se tem que $P(v,w) = [P(v,y)]^y_w$ e que a variável w satisfaz as condições exigidas pela regra. ■

Exemplo 3.4.9

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x)^1}{\exists x\, P(x)}\,\exists I \qquad \neg(\exists x\, P(x))^2}{\bot}\,\to E}{\neg P(x)}\,\to I,1}{\forall x(\neg P(x))}\,\forall I \qquad \neg(\forall x(\neg P(x)))^3}{\bot}\,\to E}{\exists x\, P(x)}\,\bot,2}{(\neg(\forall x(\neg P(x))) \to (\exists x\, P(x))}\,\to I,3$$

A conclusão é $(\neg(\forall x(\neg P(x))) \to (\exists x\, P(x))$ e não existem hipóteses abertas. ■

Resume-se agora o que foi sendo exposto ao longo da secção apresentando-se conjuntamente todas as regras de inferência do sistema de dedução natural $\mathcal{N}_c$. Como foi referido, as regras relativas aos conectivos são idênticas às apresentadas no caso do sistema $\mathcal{N}_p$.

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \varphi_1 & \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \wedge I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_1 \wedge \varphi_2\end{array}}{\varphi_1}\ \wedge E_d \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_1 \wedge \varphi_2\end{array}}{\varphi_2}\ \wedge E_e$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^m\\ \mathcal{D}\\ \varphi\end{array}}{\psi \to \varphi}\ \to I, m \qquad \dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \varphi_1 \to \varphi_2 & \varphi_1\end{array}}{\varphi_2}\ \to E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^m\\ \mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{\varphi}\ \perp, m \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_1\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ \vee I_d \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ \vee I_e$$

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} & [\varphi_1]^{m'} & [\varphi_2]^{m''}\\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3\\ \varphi_1 \vee \varphi_2 & \psi & \psi\end{array}}{\psi}\ \vee E, m', m''$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ [\varphi]\,^x_y\end{array}}{\forall x\ \varphi}\ \forall I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ [\varphi]\,^x_t\end{array}}{\exists x\ \varphi}\ \exists I$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \forall x\ \varphi\end{array}}{[\varphi]_t^x}\,\forall E \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{cc} & [[\varphi]_y^x]^m \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \exists x\ \varphi & \psi\end{array}}{\psi}\,\exists E, m$$

Regras de inferência do sistema $\mathcal{N}_c$

onde se assume que a notação $[\varphi]_t^x$ pressupõe que t é termo livre para x em φ, se assumem as condições já conhecidas sobre as marcas presentes nas regras $\to I$, $\vee E$ e $\perp$ e se assume ainda que nas regras $\forall I$ e $\exists E$ são verificados os seguintes requisitos já anteriormente referidos:

- Regra $\forall I$
  - (i) y não pode ocorrer livre nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}$
  - (ii) se y é distinto de x então y não ocorre livre em φ;
- Regra $\exists E$
  - (i) y não pode ocorrer livre em ψ nem nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}_2$ distintas de $[\varphi]_y^x$
  - (ii) se y é distinto de x então y não ocorre livre em φ
  - (iii) a marca m é tal que apenas hipóteses $[\varphi]_y^x$ na árvore $\mathcal{D}_2$ são (eventualmente) fechadas.

Pode agora estabelecer-se a seguinte definição.

Definição 3.4.10 SISTEMA DEDUTIVO $\mathcal{N}_c$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{N}_c$ é constituído pelas regras de inferência $\wedge I$, $\to I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\vee E$, $\to E$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\perp$, $\forall E$, $\forall I$, $\exists E$ e $\exists I$.

Todas as noções definidas no âmbito do sistema de $\mathcal{N}_p$ são definidas de modo análogo para o sistema $\mathcal{N}_c$. Sendo $\Phi \subseteq F_P$ e $\varphi \in F_P$ a notação

$$\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c} \varphi$$

usa-se agora para afirmar que existe uma dedução de φ a partir de Φ em $\mathcal{N}_c$ e a notação

$$\vdash_{\mathcal{N}_c} \varphi$$

para afirmar que existe prova de φ em $\mathcal{N}_c$. ∎

A descrição do sistema $\mathcal{N}_c$ apresentada nesta subsecção permite ao leitor compreender os aspectos essenciais do sistema dedutivo $\mathcal{N}_c$ e construir com facilidade derivações no sistema. O leitor interessado pode encontrar na secção 3.4.2 uma descrição deste sistema na qual se apresentam definições mais rigorosas das várias noções envolvidas.

Para terminar esta secção, faz-se agora referência a algumas questões de normalização de deduções no âmbito do sistema $\mathcal{N}_c$. Para não alongar demasiado o presente texto, faz-se simplesmente uma muito breve referência a alguns aspectos desta questão. O leitor interessado poderá consultar [11], [13] ou [12] para mais detalhes sobre normalização de deduções.

As propriedades de normalização apresentadas são semelhantes às referidas no caso da lógica proposicional. Tal como no caso da lógica proposicional, considera-se um sistema dedutivo que resulta de introduzir pequenas modificações ao sistema $\mathcal{N}_c$: (i) os nomes das regras estão explicitamente presentes nas derivações, (ii) não se incluem as regras relativas ao conectivo $\vee$ e, neste caso, também não incluem as regras relativas ao quantificador $\exists$ e (iii) a regra $\perp$ é de novo substituída pela regra $\perp\!\!\!\perp$ apresentada no caso proposicional. No que se segue, $\mathcal{N}_c^{\perp\!\!\!\perp}$ é o sistema dedutivo semelhante a $\mathcal{N}_c$ mas no qual foram efectuadas as alterações indicadas.

Verificam-se as propriedades que seguidamente se apresentam, sendo $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$ (não envolvendo o conectivo $\vee$ nem o quantificador $\exists$). Em rigor, existem mais alguns pequenos pormenores que devem ser observados. Nomeadamente, em [11] assume-se que o conjunto das variáveis, X, é a união de dois conjuntos numeráveis disjuntos, X_m e X_l e as fórmulas são construídas de tal modo que as variáveis que ocorrem livres pertencem sempre a X_l e as variáveis que ocorrem mudas pertencem sempre a X_m.

- Se $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c} \varphi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c^{\perp\!\!\!\perp}} \varphi$.

- Se $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c^{\perp\!\!\!\perp}} \varphi$ então existe uma dedução de φ a partir de Φ em $\mathcal{N}_c^{\perp\!\!\!\perp}$ na qual as fórmulas que se obtêm por aplicação da regra $\perp\!\!\!\perp$ são fórmula atómicas.

- Se $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c^{\perp\!\!\perp}} \varphi$ então existe uma dedução normal de φ a partir de Φ em $\mathcal{N}_c^{\perp\!\!\perp}$.
- O caminho principal de qualquer ramo de uma dedução normal tem nó minimum (e consequentemente fórmula minimum).
- As fórmulas que se encontram ao longo da dedução normal d são subfórmulas da conclusão de d ou das hipóteses abertas (com excepção das hipóteses $\neg\psi$ eliminadas pela aplicação da regra $\perp\!\!\perp$ e das fórmulas $\perp$ correspondentes a nós predecessores directos de folhas relativas às referidas hipóteses $\neg\psi$).

Exercícios

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos ao longo desta secção.

Exercício 3.4.11 Na sequência ψ_1 e ψ_2 designam fórmulas arbitrárias de F_Σ^X enquanto que P, Q e R designam símbolos de predicado. Mostre que:

1. $\vdash_{\mathcal{N}_c} (\forall x\, \psi_1) \rightarrow (\exists x\, \psi_1)$
2. $\vdash_{\mathcal{N}_c} (\forall x(\forall y\, P(x,y))) \leftrightarrow (\forall y(\forall x\, P(x,y)))$
3. $\vdash_{\mathcal{N}_c} (\exists x(\exists y\, P(x,y))) \leftrightarrow (\exists y(\exists x\, P(x,y)))$
4. $\vdash_{\mathcal{N}_c} (\forall x\, Q(x)) \rightarrow (\neg(\exists x\, \neg Q(x)))$ (e vice-versa)
5. $\vdash_{\mathcal{N}_c} (\exists x\, Q(x)) \rightarrow (\neg(\forall x\, (\neg Q(x))))$ (e vice-versa)
6. $\vdash_{\mathcal{N}_c} (\forall x\, (\psi_1 \rightarrow \psi_2)) \rightarrow ((\forall x\, \psi_1) \rightarrow (\forall x\, \psi_2))$
7. $\vdash_{\mathcal{N}_c} ((\forall x\, \psi_1) \wedge (\forall x\, \psi_2)) \rightarrow (\forall x\, (\psi_1 \wedge \psi_2))$ (e vice-versa)
8. $\vdash_{\mathcal{N}_c} ((\forall x\, \psi_1) \vee (\forall x\, \psi_2)) \rightarrow (\forall x\, (\psi_1 \vee \psi_2))$
9. $\vdash_{\mathcal{N}_c} ((\exists x\, \psi_1) \vee (\exists x\, \psi_2)) \rightarrow (\exists x\, (\psi_1 \vee \psi_2))$ (e vice-versa)
10. $\vdash_{\mathcal{N}_c} (\exists x\, (\psi_1 \wedge \psi_2)) \rightarrow ((\exists x\, \psi_1) \wedge (\exists x\, \psi_2))$
11. $\vdash_{\mathcal{N}_c} (\forall x\, \psi_1) \leftrightarrow \psi_1$ se x não ocorre livre em ψ_1

12. Sendo $\Phi \subseteq F^X_\Sigma$, Φ diz-se incoerente se $\Phi \vdash_{N_c} \perp$. Mostre que os conjuntos seguintes são incoerentes.

    (a) $\{\forall x\,(P(x) \to Q(x)), \exists x\,(P(x) \land (\neg Q(x)))\}$

    (b) $\{\exists y\,(P(y) \lor Q(y)), \forall x\,(\neg P(x)), \forall x\,(\neg Q(x))\}$

    (c) $\{\exists x(\neg(\exists y\, R(x,y))), \neg\exists x \forall y(\neg R(x,y))\}$

    (d) $\{\forall x(P(x) \to (\exists y R(x,y))), \exists x\,(P(x) \land (\forall y \neg R(x,y)))\}$

    (e) $\{\forall x(\exists y(P(x) \to R(x,y))), \exists x\ (P(x) \land (\neg(\exists y\, R(x,y))))\}$ ∎

Exercício 3.4.12 Após a leitura do capítulo **??**, volte a resolver os exercícios anteriores usando a ferramenta *Isabelle*. ∎

3.4.2 O sistema $\mathcal{N}_c$ revisitado ($\star$)

Tal como no caso do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$, apresenta-se agora muito brevemente a definição mais rigorosa do sistema dedutivo $\mathcal{N}_c$. Como este sistema é uma extensão do sistema $\mathcal{N}_p$, assumem-se aqui também todas as definições e notações relativas a árvores apresentadas no capítulo sobre lógica proposicional, nomeadamente, as noções de árvore, árvore etiquetada, E^M_F-árvore (onde F é um conjunto de fórmulas e M é um conjunto de marcas), folha aberta, folha fechada e conflitos de marcas. Assumem-se fixados uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$ com $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, um conjunto numerável de variáveis X e um conjunto numerável M de marcas.

Definição 3.4.13 Sistema $\mathcal{N}_c$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{N}_c$ é constituído pelas regras de inferência seguintes. Na sequência, a_1 e a_2 são $E^M_{F^X_\Sigma}$-árvores sem conflito de marcas entre si. Recorde-se que a notação $[\varphi]^x_t$ significa que $t \in T^\Sigma_X$ é livre para $x \in X$ em $\varphi \in F^\Sigma_X$.

- Regra $\forall I$: se $frm(\nu_{a_1}) = [\varphi]^x_y$ e sendo $y \in X$ tal que (i) y é x ou $y \notin VL(\varphi)$ e (ii) $y \notin VL(\varphi')$ para cada $\varphi' \in Frm(Abt_{a_1})$, então *por aplicação da regra* $\forall I$ *com variável* x *e termo* y obtém-se a $E^M_{F^X_\Sigma}$-árvore $a = a_1{}^\frown\,(\forall x\ \varphi, \emptyset)$

- Regra $\exists I$: se $frm(\nu_{a_1}) = [\varphi]^x_t$ então, *por aplicação da regra* $\exists I$ *com variável* x *e termo* t, obtém-se uma $E^M_{F^X_\Sigma}$-árvore $a = a_1{}^\frown\,(\exists x\ \varphi, \emptyset)$

- <u>REGRA $\forall E$</u>: Se $\mathit{frm}(\nu_{a_1}) = \forall x\, \varphi$ então, *por aplicação da regra $\forall E$ com variável x e termo t*, obtém-se a $E^M_{F^X_\Sigma}$-árvore $a = a_1{}^\frown\, ([\varphi]\,{}^x_t, \emptyset)$
- <u>REGRA $\exists E$</u>: se $\mathit{frm}(\nu_{a_1}) = \exists x\, \varphi$ e $\mathit{frm}(\nu_{a_2}) = \psi$ e sendo $y \in X$ e $m \in M$ tais que

  (i) $y \notin VL(\varphi')$ para cada $\varphi' \in \mathit{Frm}(Abt_{a_2} \backslash Abt_{a_2}^{[\varphi]^x_y})$

  (ii) $y \notin VL(\psi)$

  (iii) y é x ou $y \notin VL(\varphi)$

  (iv) $Mrc(Abt_{a_1}^{[\varphi]^x_y})$ é disjunto de $Mrc(Abt_{a_2}^{[\varphi]^x_y})$

  (v) se $m \in Mrc_{a_1} \cup Mrc_{a_2}$ então $Abt_{a_2}^{[\varphi]^x_y, m} \neq \emptyset$

  então *por aplicação da regra $\exists E$ com fórmula ψ, marca m, variável x e termo y*, obtém-se a $E^M_{F^X_\Sigma}$-árvore $a = \bigsqcup\{a_1, a_2\}^\frown\, (\psi, \{m\})$
- as regras $\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$ que têm definição análoga à definição apresentada para as regras com o mesmo nome no contexto do sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$, tendo em conta que na presente situação se manipulam $E^M_{F^X_\Sigma}$-árvores.

As regras $\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\forall I$ e $\exists I$ dizem-se *regras de introdução* ou *I-regras*; as regras $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E_d$ e $\forall E$ e $\exists E$ dizem-se *regras de eliminação* ou *E-regras*. A noção de aridade de uma regra é idêntica à apresentada anteriormente pelo que as regras $\forall E$, $\forall I$, $\exists I$ são unárias, ou de aridade 1, e a regra $\exists E$ é binária, ou de aridade 2. ∎

As condições sobre variáveis e sobre marcas que são impostas na definição das regras de inferência anteriores visam assegurar que são de facto verificadas em cada árvore de dedução as condições que foram descritas na secção 3.4.1 relativas às variáveis e às hipóteses que são ou não fechadas/eliminadas por aplicação das regras.

Definição 3.4.14 ÁRVORES DE DEDUÇÃO DE $\mathcal{N}_c$, CONCLUSÃO E HIPÓTESES DE ÁRVORE DE DEDUÇÃO
O conjunto das *árvores de dedução* (ou *árvores de derivação*) de $\mathcal{N}_c$ denota-se por

$D_{\mathcal{N}_c}$ e tem definição indutiva semelhante à apresentada para $D_{\mathcal{N}_p}$ usando agora as regras de inferência de $\mathcal{N}_c$. Sendo $d \in D_{\mathcal{N}_c}$, as noções de dedução de conclusão de d, hipótese de d e conjunto das hipóteses abertas de d são análogas às apresentadas para o sistema $\mathcal{N}_p$. ∎

Seguem-se as habituais noções de consequência no sistema dedutivo e de teorema do sistema dedutivo.

Definição 3.4.15 CONSEQUÊNCIA EM $\mathcal{N}_c$ E TEOREMA DE $\mathcal{N}_c$
Sejam $\varphi \in F_X^\Sigma$ e $\Phi \subseteq F_X^\Sigma$. As noções de dedução de φ a partir Φ em $\mathcal{N}_c$ e prova de φ em $\mathcal{N}_c$ são análogas às apresentadas para o sistema $\mathcal{N}_p$. Também é a análoga a definição de φ *ser consequência de* Φ *em* $\mathcal{N}_c$, o que se denota agora por

$$\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c} \varphi$$

e o mesmo acontece com a noção de *teorema de* $\mathcal{N}_c$ sendo agora a notação

$$\vdash_{\mathcal{N}_c} \varphi$$ ∎

Tem-se de novo o resultado relativo ao facto de as árvores de dedução em $\mathcal{N}_c$ serem árvores sem conflitos de marcas.

Lema 3.4.16
Se $d \in D_{\mathcal{N}_c}$ então d é uma árvore sem conflito de marcas.

Prova: O resultado é facilmente obtido tendo em conta as Definições 3.4.13 e 3.4.14. ∎

Segue-se o resultado usualmente designado como metateorema da dedução.

Proposição 3.4.17
Sendo $\varphi, \psi \in F_X^\Sigma$ e $\Phi \subseteq F_X^\Sigma$ tem-se que se $\Phi \cup \{\psi\} \vdash_{\mathcal{N}_c} \varphi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c} \psi \to \varphi$.

Prova: Semelhante à apresentada para o caso do sistema $\mathcal{N}_p$. ∎

3.4.3 Correcção e completude do sistema dedutivo $\mathcal{N}_c$

À semelhança do que foi referido no capítulo anterior, um sistema dedutivo para a lógica de primeira ordem só é interessante se for correcto, ou seja, se sempre que uma fórmula φ é consequência no sistema de um conjunto de fórmulas Φ então φ é consequência semântica de Φ (e portanto todos os teoremas são fórmulas válidas). Ao estabelecer num sistema correcto que φ é consequência de um conjunto de hipóteses Φ, apenas se usa manipulação simbólica de fórmulas (não se recorrendo assim a noções semânticas) e conclui-se, como pretendido, que a fórmula é consequência semântica de Φ. Como caso particular, pode estabelecer-se a validade de uma fórmula por manipulação simbólica, estabelecendo que é um teorema do sistema dedutivo. Na secção 3.4.3.1 prova-se a correcção do sistema $\mathcal{N}_c$. A prova é muito semelhante à apresentada no caso da correcção de $\mathcal{N}_p$.

Como também já havia sido referido, uma outra propriedade desejável num sistema dedutivo é a propriedade de completude. Um sistema diz-se completo se sempre que uma fórmula é consequência semântica de um conjunto de fórmulas então existe uma dedução/derivação no sistema da referida fórmula a partir do conjunto (e portanto toda a fórmula válida é teorema). As provas relacionadas com resultados de completude $\mathcal{N}_c$ são bastante trabalhosas e são apresentadas na secção 3.4.3.2

3.4.3.1 Correcção de $\mathcal{N}_c$

A prova da correcção do sistema $\mathcal{N}_c$ (Proposição 3.4.20) tem uma estrutura semelhante à prova da correcção do sistema $\mathcal{N}_p$. Este resultado decorre do facto de todas as regras de inferência do sistema $\mathcal{N}_c$ serem correctas (Proposição 3.4.18) e de a conclusão de cada dedução d do sistema ser consequência semântica do conjunto das hipóteses abertas de d (Proposição 3.4.19). A noção de correcção de regra de inferência é naturalmente análoga à apresentada no caso do sistema $\mathcal{N}_p$.

Proposição 3.4.18
Todas as regras do sistema $\mathcal{N}_c$ são correctas.

Prova: Há que fazer a prova para cada uma das regras. As provas relativas às regras comuns ao sistema $\mathcal{N}_p$ são idênticas às apresentadas anteriormente. Para as outras regras, e tal como anteriormente, há que (i) identificar qual a relação entre as hipóteses abertas das árvores envolvidas e (ii) provar que a conclusão da árvore obtida por aplicação da regra é consequência semântica das suas hipóteses abertas, assumindo que a mesma propriedade é verificada por cada árvore a que se aplicou da regra.

Regra $\forall I$: Suponha-se que d foi obtida por aplicação da regra $\forall I$ com variável x e termo y a partir de d_1, pelo que, sendo $conc(d_1) = [\varphi]^x_y$, tem-se que $conc(d) = \forall x\, \varphi$. Neste caso tem-se que $H_d = H_{d_1}$. Assumindo que $H_{d_1} \models [\varphi]^x_y$ há que mostrar que $H_d \models \forall x\, \varphi$. Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathbb{M} = (U, I)$ sobre Σ e $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ arbitrárias tal que $\mathbb{M}, \rho \Vdash H_d$. Das condições da regra resulta, em particular, que $x = y$ ou $y \notin VL(\varphi)$.

Suponha-se, em primeiro lugar, que $x = y$. Neste caso $[\varphi]^x_y = \varphi$. Seja $\rho' = \rho[x := u]$ uma atribuição x-equivalente a ρ. Das condições da regra resulta também que $x \notin VL(H_d)$ e portanto, pelo Lema 3.3.22, $\mathbb{M}, \rho' \Vdash H_d$ e, consequentemente, $\mathbb{M}, \rho' \Vdash \varphi$. Da Definição 3.3.10, resulta que $\mathbb{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi$. Conclui-se assim que $H_d \models \forall x\, \varphi$.

Suponha-se agora que $x \neq y$. Seja $\rho' = \rho[y := u]$ uma atribuição y-equivalente a ρ. Das condições da regra resulta que $y \notin VL(H_d)$ e portanto, pelo Lema 3.3.22, $\mathbb{M}, \rho' \Vdash H_d$ e, consequentemente, $\mathbb{M}, \rho' \Vdash [\varphi]^x_y$. Da Definição 3.3.10 resulta que $\mathbb{M}, \rho \Vdash \forall y\, [\varphi]^x_y$. Das condições da regra e do facto de $x \neq y$ resulta ainda que $y \notin VL(\varphi) \backslash \{x\}$ e que y é livre para x em φ. Deste modo, do Lema 3.3.24 resulta que $\mathbb{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi$. De novo se conclui que $H_d \models \forall x\, \varphi$.

Regra $\exists I$: Suponha-se que d foi obtida por aplicação da regra $\exists I$ com variável x e termo t a partir de d_1, pelo que, sendo $conc(d_1) = [\varphi]^x_t$, tem-se que $conc(d) = \exists x\, \varphi$. Neste caso $H_d = H_{d_1}$. Assumindo que $H_{d_1} \models [\varphi]^x_t$ há que mostrar que $H_d \models \exists x\, \varphi$. Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre Σ e $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ arbitrárias tal que $\mathbb{M}, \rho \Vdash H_d$. Tem-se então que $\mathbb{M}, \rho \Vdash [\varphi]^x_t$ e portanto, pelo Corolário 3.3.28, $\mathbb{M}, \rho \Vdash \exists x\, \varphi$. Conclui-se assim que $H_d \models \exists x\, \varphi$.

Regra $\forall E$: Prova semelhante ao caso da regra $\exists I$ recorrendo também ao Corolário 3.3.28.

Regra $\exists E$: Suponha-se que d foi obtida por aplicação da regra $\exists E$ com fórmula ψ, marca m, variável x e termo y a partir de d_1 e d_2, pelo que, sendo $conc(d_1) = \exists x\, \varphi$ e $conc(d_2) = \psi$, tem-se que $conc(d) = \psi$. Neste caso $H_{d_1} \subseteq H_d$ e que $H_{d_2} \subseteq H_d \cup \{[\varphi]^x_y\}$. Assumindo que $H_{d_1} \models= \exists x\, \varphi$ e $H_{d_2} \models \psi$ há que mostrar que $H_d \models \psi$. Seja $\mathbb{M} = (U, I)$ uma estrutura de interpretação sobre Σ e $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ arbitrárias tal que $\mathbb{M}, \rho \Vdash H_d$. Dado que $H_{d_1} \subseteq H_d$, então $\mathbb{M}, \rho \Vdash H_{d_1}$ e portanto $\mathbb{M}, \rho \Vdash \exists x\, \varphi$ o que significa que $\mathbb{M}, \rho[x{:=}u] \Vdash \varphi$ para algum $u \in U$. Dado que $H_{d_2} \subseteq H_d \cup \{[\varphi]^x_y\}$

então $I\!M, \rho \Vdash H_{d_2} \backslash \{[\varphi]_y^x\}$.

Suponha-se, em primeiro lugar, que $x = y$ e portanto $[\varphi]_y^x = \varphi$. Pelas condições da regra tem-se que $x \notin VL(H_{d_2} \backslash \{\varphi\})$ e portanto, pelo Lema 3.3.22, $I\!M, \rho[x := u] \Vdash H_{d_2} \backslash \{\varphi\}$. Tendo em conta que $I\!M, \rho[x:=u] \Vdash \varphi$, então $I\!M, \rho[x:=u] \Vdash H_{d_2}$ e, consequentemente, $I\!M, \rho[x:=u] \Vdash \psi$. Pelas condições da regra tem-se que $x \notin VL(\psi)$ e portanto, pelo Lema 3.3.22, $I\!M, \rho \Vdash \psi$. Conclui-se assim que $H_d \models \psi$.

Suponha-se agora que $x \neq y$. Pelas condições da regra tem-se que $y \notin VL(H_{d_2} \backslash \{[\varphi]_y^x\})$ e portanto, pelo Lema 3.3.22, $I\!M, \rho[y := u] \Vdash H_{d_2} \backslash \{[\varphi]_y^x\}$. Tendo em conta que $I\!M, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ e que, pelas condições da regra, $y \notin VL(\varphi)$ tem-se, pelo Lema 3.3.26, que $I\!M, \rho[y := u] \Vdash [\varphi]_y^x$. Assim, $I\!M, \rho[y := u] \Vdash H_{d_2}$ e portanto $I\!M, \rho[y := u] \Vdash \psi$. Pelas condições da regra tem-se que $y \notin VL(\psi)$ e portanto, pelo Lema 3.3.22, $I\!M, \rho \Vdash \psi$. De novo se conclui que $H_d \models \psi$. ∎

Proposição 3.4.19
Para cada dedução $d \in D_{\mathcal{N}_c}$ tem-se que $H_d \models conc(d)$.

Prova: Semelhante à apresentada no caso do sistema $\mathcal{N}_p$. ∎

Segue-se agora o enunciado e prova da correcção de $\mathcal{N}_c$.

Proposição 3.4.20
O sistema $\mathcal{N}_c$ é correcto, ou seja, sendo $\Phi \subseteq F_X^\Sigma$ e $\varphi \in F_X^\Sigma$ tem-se que

$$\text{se } \Phi \vdash_{\mathcal{N}_c} \varphi \text{ então } \Phi \models \varphi.$$

Prova: Pretende-se mostrar que se $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c} \varphi$ então para qualquer estrutura de interpretação $I\!M$ sobre Σ e $\rho \in ATR_{I\!M}$, se $I\!M, \rho \Vdash \Phi$ então $I\!M, \rho \Vdash \varphi$.

Suponha-se que então que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c} \varphi$ e seja $I\!M$ uma estrutura de interpretação sobre Σ e $\rho \in ATR_{I\!M}$ tal que $I\!M, \rho \Vdash \Phi$.

Pela Definição 3.4.15, existe $d \in D_{\mathcal{N}_c}$ tal que $conc(d) = \varphi$ e $H_d \subseteq \Phi$. Pela Proposição 3.4.19, $H_d \models conc(d)$. Dado que $I\!M, \rho \Vdash \Phi$ tem-se que $I\!M, \rho \Vdash \varphi$. ∎

3.4.3.2 Completude do sistema dedutivo $\mathcal{N}_c$ ($\star$)

Tal como no caso proposicional, para simplificar a exposição, não se apresenta neste texto a prova da completude do sistema $\mathcal{N}_c$ mas sim a prova de completude da restrição do sistema $\mathcal{N}_c$ ao caso em que não estão presentes os conectivos $\wedge$ e $\vee$ e o quantificador $\exists$. Esta restrição é designada por $\mathcal{N}_c'$. A extensão desta prova ao caso de $\mathcal{N}_c$ não é difícil e deixa-se como exercício ao leitor interessado (Exercício 3.4.44).

Tal como se referiu anteriormente, a prova de resultados de completude é mais trabalhosa do que a prova da correcção sendo necessário introduzir algumas noções e provar alguns resultados preliminares. Como apenas se manipulam fórmulas que não incluam os conectivos $\wedge$ e $\vee$ nem o quantificador $\exists$, só são relevantes as regras $\to I$, $\to E$, $\perp$, $\forall I$ e $\forall E$. Como se sabe, isto não constitui uma restrição importante dado que os outros conectivos e o quantificador $\exists$ se podem definir como abreviatura a partir dos aqui considerados ($\exists x\, \varphi =_{abv} \neg(\forall x\,(\neg\varphi))$).

Os resultados de completude que aqui se apresentam são os seguintes:

(i) se Φ é um conjunto de fórmulas e φ é uma fórmula tem-se que se $\Phi \models \varphi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi$;

(ii) se φ é uma fórmula válida então é teorema de $\mathcal{N}_c'$.

Obviamente, o segundo caso é um caso particular do primeiro.

À semelhança do que acontece no caso da prova da completude do sistema $\mathcal{N}_p'$, a prova destes resultados (Proposição 3.4.42 e Corolário 3.4.43) tem por base a noção de conjunto de fórmulas coerente (Definição 3.4.23) e o facto de qualquer conjunto conjunto de fórmulas fechadas coerente ser satisfeito por uma certa estrutura de interpretação, ou seja, ter um modelo (Proposição 3.4.40). Assim, dado um conjunto de fórmulas fechadas Φ e uma fórmula φ fechada, se $\Phi \not\vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi$ prova-se que $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é coerente e portanto existe uma certa estrutura de interpretação que satisfaz Φ mas não satisfaz φ pelo que $\Phi \not\models \varphi$. O caso em que φ e as fórmulas em Φ não são necessariamente fechadas prova-se depois com base neste resultado. Pode então concluir-se que se $\Phi \models \varphi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi$. No âmbito do sistema $\mathcal{N}_c'$, a prova da existência da estrutura de interpretação que satisfaz um certo conjunto coerente Φ é bastante mais complexa do que a apresentada no âmbito do sistema $\mathcal{N}_p'$. Esta estrutura de interpretação é construída à custa de uma teoria de Henkin coerente maximal que contenha Φ.

Para tornar a exposição mais clara, esta secção está subdividida em duas subsecções. Na subsecção 3.4.3.2 apresentam-se várias noções que vão ser necessárias para provar os resultados de completude pretendidos como, por exemplo, as noções de teoria, teoria coerente maximal e teoria de Henkin. Na subsecção 3.4.3.2 provam-se então os resultados de completude.

Noções auxiliares

Apresentam-se em primeiro lugar várias noções auxiliares que são necessárias para apresentar os resultados de completude relativos ao sistema $\mathcal{N}_c$.

Como se referiu acima, assume-se que apenas se manipulam fórmulas que não incluam os conectivos $\wedge$ e $\vee$ nem o quantificador $\exists$ e portanto introduz-se a notação seguinte e definição seguintes.

Notação 3.4.21 Sendo Σ uma assinatura de primeira ordem e X um conjunto de variáveis, no que se segue $F'{}^X_\Sigma$ denota o conjunto definido como F^X_Σ (o conjunto das fórmulas de primeira ordem obtidas a partir dos símbolos da assinatura Σ e das variáveis em X) mas não envolvendo os conectivos $\wedge$ e $\vee$ nem o quantificador $\exists$. Naturalmente, todas as definições e notações envolvendo fórmulas de F^X_Σ anteriormente apresentadas na subsecção 3.4.2 são também aplicáveis a $F'{}^X_\Sigma$. Em geral, no que se refere a notações, acrescentar-se-á uma plica ($'$) às notações utilizadas anteriormente. Assume-se fixado um certo conjunto (numerável) M de marcas.

Definição 3.4.22 Sistema $\mathcal{N}'_c$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{N}'_c$ é constituído pelas regras $\rightarrow I$, $\rightarrow E$, $\forall I$, $\forall E$ e $\perp$ como na Definição 3.4.13 mas considerando apenas $E^M_{F'{}^X_\Sigma}$-árvores.

Sempre que for necessário referir simultaneamente sistemas dedutivos que têm subjacente assinaturas diferentes e/ou conjuntos de variáveis diferentes e/ou conjuntos de variáveis diferentes, utiliza-se a notação $\mathcal{N}'_c(\Sigma, X, M)$. ∎

Todas as definições e notações relativas ao sistema de dedução natural $\mathcal{N}_c$ apresentadas anteriormente podem como é natural ser adaptadas para o caso do sistema $\mathcal{N}'_c$.

Seguem-se as definições das várias noções que vão ser necessárias.

Definição 3.4.23 Conjunto coerente
O conjunto $\Phi \subseteq F'{}^X_\Sigma$ diz-se $\mathcal{N}'_c$-*coerente* se $\Phi \nvdash_{\mathcal{N}'_c} \perp$. Sempre que não exista ambiguidade sobre o sistema dedutivo em causa diz-se simplesmente que Φ é coerente. ∎

Segue-se a noção de extensão de assinatura.

Definição 3.4.24 EXTENSÃO DE ASSINATURA
Sejam $\Sigma_1 = (\{SF_i^1\}_{i \in I\!N_0}, \{SP_i^1\}_{i \in I\!N_0})$ e $\Sigma_2 = (\{SF_i^2\}_{i \in I\!N_0}, \{SP_i^2\}_{i \in I\!N_0})$ duas assinaturas de primeira ordem e sejam $SF = \{SF_i\}_{i \in I\!N_0}$ e $SP = \{SP_i\}_{i \in I\!N_0}$ famílias indexadas de conjuntos de símbolos de função e de predicado, respectivamente.

Diz-se que Σ_2 é *a extensão de* Σ_1 *com SF e SP* se para cada $i \in I\!N_0$,

- $SF_i^1 \cap SF_i = \emptyset$ e $SP_i^1 \cap SP_i = \emptyset$;
- $SF_i^2 = SF_i^1 \cup SF_i$ e $SP_i^2 = SP_i^1 \cup SP_i$. ■

Observação 3.4.25 Seja Σ_2 uma assinatura de primeira ordem extensão de uma outra assinatura de primeira ordem Σ_1 com *SF* e *SP*.

Para simplificar a notação se, por exemplo, todos os conjuntos da família *SP* são vazios, dir-se-á que Σ_2 é *a extensão de* Σ_1 *com SF*. Se, em particular, se tem ainda que para cada $i \in I\!N$, $SF_i = \emptyset$ e $SF_0 = \{c_1, c_2, \ldots\}$ dir-se-á que Σ_2 é *a extensão de* Σ_1 *com as constantes* $c_1, c_2, \ldots$. Do mesmo modo, se existe apenas um símbolo f na união de todos os conjuntos em *SF* dir-se-á que Σ_2 é *a extensão de* Σ_1 *com o símbolo de função* f ou *com* f. ■

Seguidamente apresentam-se as noções de teoria e modelo de teoria.

Definição 3.4.26 $\mathcal{N}_c'$-TEORIA
Sendo $\Gamma \subseteq F'^X_\Sigma$, diz-se que Γ é uma $\mathcal{N}_c'$*-teoria* (ou *teoria*) se todas as fórmulas em Γ são fórmulas fechadas e

$$\text{se } \Gamma \vdash_{\mathcal{N}_c'(\Sigma,X,M)} \varphi \text{ então } \varphi \in \Gamma$$

para cada $\varphi \in F'^X_\Sigma$. Sendo $\Gamma \subseteq F'^X_\Sigma$ uma teoria e $Ax \subseteq F'^X_\Sigma$ diz-se que Ax é um *conjunto de axiomas de* Γ se $\Gamma = \{\varphi \in F'^X_\Sigma : Ax \vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi\}$. ■

Definição 3.4.27 MODELO DE TEORIA
Sendo $\Gamma \subseteq F'^X_\Sigma$ uma teoria diz-se que uma estrutura de interpretação $I\!M$ sobre Σ é um *modelo de* Γ se $I\!M \Vdash \varphi$ para cada $\varphi \in \Gamma$. A classe de todos os modelos de Γ é denotada por $Mod(\Gamma)$. ■

Finalmente, apresentam-se agora as noções de teoria coerente, teoria coerente maximal, extensão de teoria e teoria de Henkin.

Definição 3.4.28 TEORIA COERENTE E COERENTE MAXIMAL
Sendo $\Gamma \subseteq F'^{X}_{\Sigma}$ uma teoria, Γ diz-se *coerente* se o conjunto de fórmulas Γ é coerente e diz-se *coerente maximal* se é coerente e para cada teoria coerente Γ', se $\Gamma \subseteq \Gamma'$ então $\Gamma = \Gamma'$. ∎

Definição 3.4.29 EXTENSÃO DE TEORIA, EXTENSÃO CONSERVATIVA E TEORIA CONSERVATIVA SOBRE OUTRA TEORIA
Sejam Σ_1 e Σ_2 duas assinaturas de primeira ordem tais que Σ_2 é uma extensão de Σ_2 e X_1 e X_2 dois conjuntos (numeráveis) de variáveis tais que $X_1 \subseteq X_2$ e sejam $\Gamma_1 \subseteq F'^{X_1}_{\Sigma_1}$ e $\Gamma_2 \subseteq F'^{X_2}_{\Sigma_2}$ duas teorias.

- Γ_2 é *extensão* de Γ_1 se $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.
- Γ_2 é *extensão conservativa* de Γ_1 se $\Gamma_2 \cap F'^{X_2}_{\Sigma_2} = \Gamma_1$.
- Γ_2 é *conservativa* sobre Γ_1 se

  $$\text{se } \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{N}_c'(\Sigma_2,X_2,M)} \varphi \text{ então } \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{N}_c'(\Sigma_1,X_1,M)} \varphi$$

  para cada $\varphi \in F'^{X_1}_{\Sigma_1}$. ∎

Observação 3.4.30 No que se segue vai ser necessário considerar frequentemente fórmulas do tipo

$$(\forall y(\psi \to \bot)) \to \bot$$

que podem ser representadas por $\neg(\forall y(\neg\psi))$ usando a abreviatura relativa a $\neg$ ou ainda

$$\exists y\, \psi$$

usando a abreviatura relativa a $\exists$. Como esta última representação é mais agradável, ela será usada preferencialmente. Assim, sempre que se faça referência a uma fórmula $\exists y\, \psi$ no âmbito de F'^{X}_{Σ}, tal deverá ser entendido como uma abreviatura de $(\forall y(\psi \to \bot)) \to \bot$ (ou de $\neg(\forall y(\neg\psi))$).

Do mesmo modo, usar-se-ão livremente as regras $\exists I$ e $\exists E$ que devem ser naturalmente entendidas como abreviaturas das derivações correspondentes (isto é, das derivações que seriam feitas se se trabalhasse com $\neg(\forall y(\neg\psi))$. ∎

Definição 3.4.31 TEORIA DE HENKIN
Seja $\Gamma \subseteq F'^{X}_{\Sigma}$ uma teoria. Diz-se que Γ é uma *teoria de Henkin* se para cada fórmula fechada $\exists x\, \varphi$ existe uma constante c tal que $(\exists x\, \varphi) \to [\varphi]^x_c \in \Gamma$. A constante c diz-se *testemunha para* $\exists x\, \varphi$. ∎

Definição 3.4.32 TEORIA*
Seja $\Gamma \subseteq F'^{X}_{\Sigma}$ uma teoria. Para cada fórmula fechada do tipo $\exists x\, \varphi$ considere-se uma constante c_φ (que se supõe distinta das constantes presentes em Σ) e seja Σ^* a extensão de Σ com as constantes assim obtidas. Designa-se por Γ^* a teoria com conjunto de axiomas

$$\Gamma \cup \{(\exists x\, \varphi) \to [\varphi]^x_{c_\varphi} : \exists x\, \varphi \in F'^{X}_{\Sigma} \text{ é fórmula fechada}\}.$$

Note-se que $\Gamma^* \subseteq F'^{X}_{\Sigma^*}$. ■

Completude de $\mathcal{N}'_c$

Provam-se agora os resultados de completude referidos. Recorde-se que estes resultados são os seguintes:

(i) se Φ é um conjunto de fórmulas fechadas e φ é uma fórmula tem-se que se $\Phi \models \varphi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi$

(ii) se φ é uma fórmula válida então é teorema de $\mathcal{N}'_c$

sendo que (ii) é um caso particular (i).

Como se referiu anteriormente, a prova destes resultados (Proposição 3.4.42 e Corolário 3.4.43) tem por base a noção de conjunto de fórmulas coerente e o facto de qualquer conjunto conjunto de fórmulas fechadas coerente ter um modelo (Proposição 3.4.40): dado um conjunto de fórmulas fechadas Φ e uma fórmula φ fechada (o caso em que φ não é fechada prova-se depois com base neste resultado), se $\Phi \nvdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi$ prova-se que $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é coerente, existindo assim uma estrutura de interpretação que satisfaz Φ mas não satisfaz φ pelo que $\Phi \not\models \varphi$ e portanto tem-se que se $\Phi \models \varphi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi$.

Com também se referiu, a prova da existência da estrutura de interpretação que satisfaz um dado conjunto coerente Φ é bastante mais complexa do que a apresentada no âmbito do sistema $\mathcal{N}'_p$, sendo construída à custa de uma teoria de Henkin coerente maximal que contenha a teoria Γ_Φ, i.e, a teoria que tem Φ como conjunto de axiomas (Proposição 3.4.40). A existência desta teoria de Henkin é assegurada estabelecendo que dada uma teoria Γ: (i) Γ^* é conservativa sobre Γ (Proposição 3.4.35), (ii) existe uma teoria de Henkin, Γ_ω, que é conservativa sobre Γ (Proposição 3.4.36) e (iii) existe uma teoria coerente maximal que contém Γ_ω e é também teoria de Henkin (consequência das Proposições 3.4.36, 3.4.38 e 3.4.39).

Tendo em conta o parágrafo anterior, o primeiro objectivo vai ser provar que dada uma teoria Γ, a teoria Γ^* é conservativa sobre Γ. Para tal é no entanto necessário apresentar primeiro uma definição e provar um lema auxiliar. Este lema relaciona o papel desempenhado numa derivação pelas constantes e pelas variáveis livres: variáveis livres podem tomar o lugar das constantes numa derivação.

Definição 3.4.33 SUBSTITUIÇÃO DE CONSTANTE POR VARIÁVEL LIVRE
Sejam $\varphi \in F'^{X}_{\Sigma}$, $x \in X$ tal que $x \notin V(\varphi)$ e c uma constante. A noção de *substituição de c por x em φ* é análoga à noção de substituição de uma variável por um termo (Definição 3.2.19) sendo φ^c_x a notação usada.

Se $\Gamma \subseteq F'^{X}_{\Sigma}$ e $x \notin V(\Gamma)$ então $\Gamma^c_x = \{\varphi^c_x \colon \varphi \in \Gamma\}$.

Do mesmo modo, e à semelhança da Definição 3.2.18, pode definir-se a noção de *substituição de c por x em $t \in T^{X}_{\Sigma}$*. ■

Substituir uma constante por uma variável (livre) pode ser visto, sintacticamente, como substituir uma variável livre por outra variável livre. Se c ocorrer em φ é sempre efectuada a substituição (pois c nunca está quantificada). A substituição é sempre possível porque x é "livre para c"uma vez que não existem quantificações sobre x pois x não ocorre em φ.

Lema 3.4.34
Sejam $\Gamma \subseteq F'^{X}_{\Sigma}$, $\varphi \in F'^{X}_{\Sigma}$, $x \in X$ tal que $x \notin V(\Gamma) \cup \{\varphi\}$ e c uma constante.

1. Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi$ então $\Gamma^c_x \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi^c_x$.

2. Se c não ocorre em Γ tem-se que se $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi$ então $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}'_c} \forall x\, (\varphi^c_x)$.

Prova (esboço):
1. A prova faz-se por indução no conjunto indutivo $D_{\mathcal{N}'_c}$ provando-se que para cada $d \in D_{\mathcal{N}'_c}$, existe uma dedução $d' \in D_{\mathcal{N}'_c}$ tal que $conc(d') = conc(d)^c_x$ e $H_{d'} = {H_d}^c_x$ assumindo que x não ocorre em nenhuma fórmula de Frm_d. Note-se que assim sendo, se $x \notin V(\Gamma) \cup \{\varphi\}$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi$ e sendo d uma dedução tal que $conc(d) = \varphi$ e $H_d \subseteq \Gamma$ (tendo em conta a hipótese sobre x é sempre possível encontrar uma dedução d tal que x não ocorra nas fórmulas em Frm_d), a dedução d' obtida como descrito permite concluir que $\Gamma^c_x \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi^c_x$.

Base: Se d é a árvore singular com etiqueta $(\varphi\{m\})$ então d' é uma árvore com etiqueta $(\varphi^c_x, \{m\})$.

Passo: Seja $d \in D_{\mathcal{N}'_c}$. Existem dois casos a considerar: (i) d foi obtida a partir de outra(s) árvore(s) em $D_{\mathcal{N}'_c}$ através da aplicação de uma regra em R'_p ou (ii) d foi obtida a partir de outra árvore $D_{\mathcal{N}'_c}$ através da aplicação da regra $\forall E$ ou da regra $\forall I$.

(i) Suponha-se que d foi obtida a partir de d_1 e d_2 através da aplicação da regra $\rightarrow E$. Neste caso, sendo $conc(d_1) = \varphi \rightarrow \psi$ e $conc(d_2) = \varphi$, $conc(d) = \psi$ e $H_d = H_{d_1} \cup H_{d_2}$. Por hipótese de indução existem d'_1 e d'_2 em $D_{\mathcal{N}'_c}$ tal que $conc(d'_1) = conc(d_1)^c_x = (\varphi \rightarrow \psi)^c_x = \varphi^c_x \rightarrow \psi^c_x$ e $H_{d'_i} = H_{d_i}{}^c_x$ $(i = 1, 2)$. Pode-se assumir, sem perda de generalidade, que estas árvores não têm conflito de marcas ente si e são compatíveis para a união (caso contrário bastará introduzir as alterações necessárias tendo o cuidado de assegurar que as condições sobre as hipóteses abertas se mantêm). Aplicando a regra $\rightarrow E$ a estas árvores, obtém-se uma árvore d' tal que $conc(d') = \psi^c_x = conc(d)^c_x$ e $H_{d'} = H_{d'_1} \cup H_{d'_2} = H_{d_1}{}^c_x \cup H_{d_2}{}^c_x = (H_{d_1} \cup H_{d_2})^c_x = H_d{}^c_x$ como se pretendia.

Os outros casos são semelhantes.

(ii) Regra $\forall E$: suponha-se que d foi obtida a partir de d_1 através da aplicação da regra $\forall E$ com variável z e termo t. Neste caso, $conc(d_1) = \forall z\, \varphi$, $conc(d) = [\varphi]^z_t$ e $H_d = H_{d_1}$. Por hipótese de indução existe d'_1 em $D_{\mathcal{N}'_c}$ tal que $conc(d'_1) = conc(d_1)^c_x = (\forall z\, \varphi)^c_x = \forall z\, (\varphi)^c_x$ e $H_{d'_1} = H_{d_1}{}^c_x$. Aplicando a d'_1 a regra $\forall E$ com variável z e termo t^c_x (note-se que dadas as hipóteses sobre x, t^c_x é livre para x em φ^c_x) obtém-se uma árvore d' tal que $conc(d') = (\varphi^c_x)^z_{t^c_x} = [\varphi^z_t]^c_x = conc(d)^c_x$ e $H_{d'} = H_{d'_1} = H_{d_1}{}^c_x = H_d{}^c_x$ como se pretendia.

Regra $\forall I$: suponha-se que d foi obtida a partir de d_1 através da aplicação da regra $\forall I$ com variável z e termo y. Neste caso, $conc(d_1) = [\varphi]^z_y$, $conc(d) = \forall z\, \varphi$ e $H_d = H_{d_1}$. Por hipótese de indução existe d'_1 em $D_{\mathcal{N}'_c}$ tal que $conc(d'_1) = conc(d_1)^c_x = ([\varphi]^z_y)^c_x = [\varphi^c_x]^z_y$ (pois $z \neq x$) e $H_{d'_1} = H_{d_1}{}^c_x$. Aplicando a d'_1 a regra $\forall I$ com variável z e termo y (note-se que dadas as hipóteses sobre x, as hipóteses de aplicação desta regra são satisfeitas) obtém-se uma árvore d' tal que $conc(d') = \forall z\, (\varphi^c_x) = (\forall z\, \varphi)^c_x = conc(d)^c_x$ e $H_{d'} = H_{d'_1} = H_{d_1}{}^c_x = H_d{}^c_x$ como se pretendia.

2. Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi$, por 1., $\Gamma^c_x \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi^c_x$ e dado que c não ocorre em Γ, $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi^c_x$. Tendo em conta que x não ocorre em $\Gamma \cup \{\varphi\}$, à dedução que permite concluir que $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi^c_x$ pode aplicar-se a regra $\forall I$ e consequentemente $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}'_c} \forall x(\varphi^c_x)$. ∎

É possível agora mostrar que, sendo Γ uma teoria, Γ^* é conservativa sobre Γ.

Proposição 3.4.35

Seja $\Gamma \subseteq F'^{\,X}_{\Sigma}$ uma teoria. Tem-se que Γ^* é conservativa sobre Γ.

Prova: A prova divide-se em duas partes.

1. Mostra-se que sendo $(\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_c$ um dos novos axiomas da teoria Γ^*, se $\Phi \cup \{(\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_c\} \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$, onde $\Phi \subseteq F'^{\,X}_{\Sigma}$ só contém fórmulas fechadas e c não ocorre nas fórmulas em $\Phi \cup \{\psi\}$, então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$.

(i) Se $\Phi \cup \{(\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_c\} \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$ então, aplicando a regra $\to I$ à dedução correspondente, tem-se que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_c} ((\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_c) \to \psi$.

(ii) De (i) e sendo y uma variável que não ocorre em Frm_d, onde d é a derivação correspondente a $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_c} ((\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_c) \to \psi$, pelo Lema 3.4.34, $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_c} ((\exists x\,\varphi) \to ([\varphi]^x_c)^c_y) \to \psi$. Note-se que $([\varphi]^x_c)^c_y = [\varphi]^x_y$.

(iii) De (ii), aplicando a regra $\forall I$ à dedução correspondente a $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_c} ((\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_y) \to \psi$, tem-se que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_c} \forall y(((\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_y) \to \psi)$ (note-se que y verifica as hipóteses relativas a esta regra pois y não ocorre em Γ).

(iv) A partir de (iii), é possível construir a dedução (usando marcas m_1, m_2 e m_3 convenientes).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\forall y(\neg((\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_y)))\;^{m_3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\psi\;^{m_2} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \forall y(((\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_y) \to \psi)\end{matrix}}{((\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_y) \to \psi}\,\forall E \qquad (\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_y\;^{m_1}}{\psi}\,{\to}E}{\bot}\,{\to}E}{\neg((\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_y)}\,{\to}I, m_1}{\forall y(\neg((\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_y))}\,\forall I}{\bot}\,{\to}E}{\psi}\,\bot, m_2}{(\neg(\forall y(\neg((\exists x\,\varphi) \to [\varphi]^x_y)))) \to \psi}\,{\to}I, m_3$$

onde as hipóteses abertas de $\mathcal{D}_1$ estão contidas em Φ e y não ocorre em ψ nem em Φ, a qual permite concluir que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} (\neg(\forall y(\neg((\exists x\, \varphi) \to [\varphi]^x_y)))) \to \psi$, ou, usando as abreviaturas, $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} (\exists y((\exists x\, \varphi) \to [\varphi]^x_y)) \to \psi$.

(v) É possível construir a dedução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta^1 \qquad \neg\delta^2}{[\varphi]^x_y}\,{\to}E}{\delta \to [\varphi]^x_y}\,{\to}I,1 \qquad \dfrac{\forall y(\neg(\delta \to [\varphi]^x_y))^{\,3}}{\neg(\delta \to [\varphi]^x_y)}\,\forall E}{\bot}\,{\to}E}{\delta}\,\bot,2 \qquad \delta \to (\exists y[\varphi]^x_y)^{\,5}}{\exists y[\varphi]^x_y}\,{\to}E \qquad \dfrac{\dfrac{\forall y(\neg(\delta \to [\varphi]^x_y))^{\,3}}{\neg(\delta \to [\varphi]^x_y)}\,\forall E \qquad \dfrac{[\varphi]^{x\;4}_y}{\delta \to [\varphi]^x_y}\,{\to}I,4}{\bot}\,{\to}E}{\bot}\,\exists E,4}{\neg(\forall y(\neg(\delta \to [\varphi]^x_y)))}\,{\to}I,3}{(\delta \to (\exists y[\varphi]^x_y)) \to (\neg(\forall y(\neg(\delta \to [\varphi]^x_y))))}\,{\to}I,5$$

onde δ representa $\exists x\, \varphi$, a qual, usando as abreviaturas, permite concluir que $\vdash_{\mathcal{N}_c'}$ $(\delta \to (\exists y[\varphi]^x_y)) \to (\exists y(\delta \to [\varphi]^x_y))$. Para simplificar a exposição usou-se a regra $\exists E$ (note-se que as hipóteses garantem que todos os requisitos para a sua aplicação se verificam), a qual se pode construir, como é evidente, à custa apenas das regras de $\mathcal{N}_c'$ (deixa-se como exercício essa construção).

Usando também (iv) é possível construir a dedução (usando uma marca m conveniente)

$$\dfrac{\dfrac{\delta \to (\exists y[\varphi]^x_y)^{\,m} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_3\\ (\delta \to (\exists y[\varphi]^x_y)) \to (\exists y(\delta \to [\varphi]^x_y))\end{matrix}}{\exists y(\delta \to [\varphi]^x_y)}\,{\to}E \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ \exists y(\delta \to [\varphi]^x_y) \to \psi\end{matrix}}{\qquad}\,{\to}E$$

$$\dfrac{\psi}{(\delta \to (\exists y [\varphi]^x_y)) \to \psi}\ \to I, m$$

onde δ representa $\exists x\, \varphi$, $\mathcal{D}_3$ não tem hipóteses abertas e as hipóteses abertas de $\mathcal{D}_2$ estão em Φ, a qual permite concluir que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} (\delta \to (\exists y[\varphi]^x_y)) \to \psi$.

(vi) Considere-se a dedução (note-se que, nas condições da Proposição, $[\neg[\varphi]^x_y]^y_x = \neg\varphi$)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\forall x(\neg\varphi))^{4} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi^{2} \qquad \dfrac{\forall y(\neg[\varphi]^x_y)^{1}}{[\neg[\varphi]^x_y]^y_x}\ \forall E}{\bot}\ \to E}{\neg(\forall y(\neg[\varphi]^x_y))}\ \to I, 1 \qquad \forall y(\neg[\varphi]^x_y)^{3}}{\bot}\ \to E}{\neg\varphi}\ \to I, 2}{\forall x(\neg\varphi)}\ \forall I}{\bot}\ \to E}{\neg(\forall y(\neg[\varphi]^x_y))}\ \to I, 3}{(\neg(\forall x(\neg\varphi)) \to (\neg(\forall y(\neg[\varphi]^x_y)))}\ \to I, 4$$

a qual permite concluir que $\vdash_{\mathcal{N}_c'} (\neg(\forall x(\neg\varphi)) \to (\neg(\forall y(\neg[\varphi]^x_y)))$ ou seja, que $\vdash_{\mathcal{N}_c'} (\exists x\, \varphi) \to (\exists y\, [\varphi]^x_y)$.

(vii) De (v) e (vii), usando a regra $\to E$ facilmente se conclui que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} \psi$.

2. O objectivo é provar agora que se $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{N}_c'} \psi$ com $\psi \in F'^{\,X}_{\Sigma}$ então $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}_c'} \psi$. Suponha-se então que $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{N}_c'} \psi$. Pelas Definições 3.4.26 e 3.4.32, $\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash_{\mathcal{N}_c'} \psi$, com $n \in I\!N_0$, onde os elementos de $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ são novos axiomas do tipo $(\exists x\, \varphi) \to [\varphi]^x_c \in \Gamma$. Prova-se, por indução em n que $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}_c'} \psi$.

Base: trivial pois nesse caso $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ é vazio.

Passo: $\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}\} \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$. Fazendo $\Phi = \Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, tem-se que $\Phi \cup \{\sigma_{n+1}\} \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$ e se está nas condições de 1. Logo tem-se que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$ e, por hipótese de indução, $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$. ■

O objectivo que se pretende agora atingir é o seguinte: dada uma teoria Γ, encontrar uma teoria de Henkin que seja conservativa sobre Γ. Note-se que não é garantido que a teoria Γ^* seja uma teoria de Henkin, pois ao enriquecer a linguagem adicionaram-se mais fórmulas para as quais pode não haver testemunhas. O objectivo vai assim ser, usando a noção de teoria-$*$, encontrar uma teoria de Henkin que seja conservativa sobre Γ.

Proposição 3.4.36
Seja $\Gamma \subseteq F'^{X}_{\Sigma}$ uma teoria. Seja $\Gamma_0 = \Gamma$ e, para cada $i \in I\!N_0$, $\Gamma_{i+1} = (\Gamma_i)^*$. Tem-se que $\Gamma_\omega = \bigcup_{i \in I\!N_0} \Gamma_i$ é uma teoria de Henkin e é conservativa sobre Γ.

Prova (esboço): Para cada $i \in I\!N_0$, seja Σ_i a assinatura correspondente à linguagem $F'^{X}_{\Sigma_i}$ subjacente a Γ_i e seja Σ_ω a assinatura correspondente à linguagem $F'^{X}_{\Sigma_\omega}$ subjacente a Γ_ω.

1. Prova-se em primeiro lugar que para cada $i \in I\!N_0$, Γ_i é conservativa sobre Γ. A prova decorre por indução.

Base: Γ_0 é conservativa sobre Γ pois $\Gamma_0 = \Gamma$.

Passo: Suponha-se, por hipótese de indução, que Γ_i é conservativa sobre Γ, $i \geq 0$. Se $\Gamma_{i+1} \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$, com $\psi \in F'^{X}_{\Sigma} \subseteq F'^{X}_{\Sigma_i}$, então pela Proposição 3.4.35, Γ_{i+1} é conservativa sobre Γ_i e portanto $\Gamma_i \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$. Usando a hipótese de indução $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$.

2. Prova-se agora que Γ_ω é uma teoria. Seja $\psi \in F'^{X}_{\Sigma_\omega}$ tal que $\Gamma_\omega \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$. Então existe $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma_\omega$, $n \in I\!N_0$, tal que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$. Tem-se que, para cada $1 \leq i \leq n$, $\varphi_i \in \Gamma_{k_i}$ para algum $k_i \in I\!N_0$. Seja $m = max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Dado que, por construção, $\Gamma_{i+1} \subseteq \Gamma_i$, $\Phi \subseteq \Gamma_m$ e portanto $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$. Como Γ_m é uma teoria tem-se que $\psi \in \Gamma_m \subseteq \Gamma_\omega$.

3. Prova-se agora que Γ_ω é uma teoria de Henkin. Seja $\exists x \varphi \in F'^{X}_{\Sigma_\omega}$ uma fórmula fechada. Então $\exists x \varphi \in F'^{X}_{\Sigma_i}$ para algum $i \in I\!N_0$. Por construção, $(\exists x \varphi) \to [\varphi]^x_c \in \Gamma_{i+1}$ para alguma constante c. Como $\Gamma_{i+1} \subseteq \Gamma_\omega$, $(\exists x \varphi) \to [\varphi]^x_c \in \Gamma_\omega$.

3. Prova-se agora o resultado pretendido: Γ_ω é conservativa sobre Γ. Suponha-se que $\Gamma_\omega \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$, com $\psi \in F'^{X}_{\Sigma}$. Raciocinando como em 2. conclui-se que $\Gamma_i \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$ para algum $i \in I\!N_0$. Por 1., $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}'_c} \psi$. ■

Como corolário tem-se que se uma teoria Γ é um conjunto coerente então Γ_ω é também coerente.

Corolário 3.4.37
Seja $\Gamma \subseteq F_\Sigma^X$ uma teoria. Se Γ é coerente então Γ_ω é coerente.
Prova: Suponha-se, por absurdo, que $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{N}_c'} \perp$ e $\Gamma_\omega \vdash_{\mathcal{N}_c'} \perp$. Pela Proposição 3.4.36, $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}_c'} \perp$ o que contradiz a hipótese. ∎

Seguidamente, o objectivo é estender a teoria Γ_ω de forma a obter uma teoria coerente maximal. Para tal mostra-se que qualquer teoria coerente está contida numa teoria coerente maximal.

Proposição 3.4.38
Seja $\Gamma \subseteq F'^X_\Sigma$ uma teoria coerente. Existe uma teoria coerente maximal que contém Γ.

Prova: Seja Γ uma teoria coerente e seja G_Γ o conjunto de todas as teorias (contidas em F'^X_Σ) que são extensões coerentes de G_Γ. O conjunto $G_\Gamma \neq \emptyset$ pois $\Gamma \in G_\Gamma$. Considere-se a ordem parcial (ou conjunto parcialmente ordenado) $(G_\Gamma, \subseteq)$.

(i) Seja $(G', \subseteq)$, com $G' \subseteq G_\Gamma$, um conjunto totalmente ordenado. Mostra-se que $(G', \subseteq)$ tem um majorante em G_Γ, isto é, existe $\Psi \in G_\Gamma$ tal que todos os elementos de G' são subconjuntos de Ψ. Seja $\Phi = \bigcup_{\Gamma' \in G'} \Gamma'$. Por construção, $T \subseteq \Phi$.

Se $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} \psi$, então existe um subconjunto finito $\Phi' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de Φ tal que $\Phi' \vdash_{\mathcal{N}_c'} \psi$. Para cada $1 \leq i \leq n$, $\varphi_i \in \Gamma_i' \in G'$. Dado que $(G', \subseteq)$ é totalmente ordenado existe $1 \leq k \leq n$ tal que $\Gamma_i \subseteq \Gamma_k$ para cada $1 \leq i \leq n$. Logo $\Gamma_k \vdash_{\mathcal{N}_c'} \psi$ e, portanto, como Γ_k é teoria, $\psi \in \Gamma_k$. Consequentemente $\psi \in \Phi$. Conclui-se assim que Φ é uma teoria.

Se $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} \perp$, ou seja, Φ não for coerente, então raciocinando como no parágrafo anterior, conclui-se que existiria $\Gamma' \in G'$ tal que $\Gamma' \vdash_{\mathcal{N}_c'} \perp$. Isto é uma contradição porque os elementos de G' são teorias coerentes. Conclui-se assim que Φ é coerente.

Dos parágrafos anteriores resulta que a teoria Φ é uma extensão coerente de Γ (isto é, é um elemento de G_Γ) contendo todos os elementos de G'. Deste modo Φ é um majorante de G' em G_Γ.

(ii) Por (i) e pelo Lema de Zorn[3] tem-se que G tem elemento maximal Γ_m.

[3]Lema de Zorn: seja $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado tal que (i) $A \neq \emptyset$ e (ii) todo o conjunto totalmente ordenado $(B, \leq)$ com $B \subseteq A$ tem majorante em A. Então A tem um elemento maximal a (ou seja, se existe $x \in A$ tal que $a \leq x$ então $a = x$).

(iii) Por (ii), tem-se que se Γ' é extensão coerente de Γ (ou seja, se $\Gamma' \in G$ e $\Gamma_m \subseteq \Gamma'$ então $\Gamma_m \subseteq \Gamma'$), o que significa que Γ_m é uma extensão de T coerente maximal. ■

Proposição 3.4.39
Seja $\Gamma \subseteq F'^{X}_{\Sigma}$ uma teoria de Henkin. Se $\Gamma' \subseteq F'^{X}_{\Sigma}$ é uma teoria que contém Γ então Γ' também é uma teoria de Henkin.

Prova: Trivial dado que a linguagem se mantém e por isso, para cada fórmula em F'^{X}_{Σ} fechada do tipo $\exists x\, \varphi$, existe uma constante c tal que $(\exists x\, \varphi) \to [\varphi]^x_c \in \Gamma$ e portanto $(\exists x\, \varphi) \to [\varphi]^x_c \in \Gamma'$. ■

Pode provar-se agora o resultado mais importante que permitirá provar a completude desejada: qualquer conjunto de fórmulas fechadas que seja coerente tem um modelo.

Proposição 3.4.40
Seja $\Phi \subseteq F'^{X}_{\Sigma}$ constituído apenas por fórmulas fechadas. Se Φ é coerente então Φ tem um modelo.

Prova: Seja $\Gamma_\Phi = \{\varphi : \Phi \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi\}$ a teoria que tem Φ como conjunto de axiomas. O objectivo vai ser encontrar um modelo para Γ_Φ (o qual será também um modelo de Φ). Este modelo vai ser construído à custa de uma teoria de Henkin que seja coerente maximal e contenha Γ_Φ.

(i) Pelas Proposições 3.4.36, 3.4.38 e 3.4.39, existe uma teoria $\Gamma_m \subseteq F'^{X}_{\Sigma_m}$ que é extensão coerente maximal de Γ_Φ e é teoria de Henkin.

(ii) Seja $I\!\!M = (U, I)$ uma estrutura de interpretação sobre Σ^X_m verificando os seguintes requisitos: (a) $U = \{t \in T^X_{\Sigma_m} : t$ é termo fechado$\}$, (b) $I(c) = c$ para cada constante c, (c) $I(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ para cada símbolo de função n-ário e $(t_1, \ldots, t_n) \in U^n$, (d) $I(P) = 1$ se e só se $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}'_c} P$ e (e) $I(P)(t_1, \ldots, t_n) = 1$ se e só se $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}'_c} P(t_1, \ldots, t_n)$ para cada símbolo de predicado n-ário e $(t_1, \ldots, t_n) \in U^n$.

(iii) Sendo $I\!\!M = (U, I)$ a estrutura de interpretação definida em (ii) mostra-se, por indução no conjunto de termos fechados $TF^X_{\Sigma_m} \subseteq T^X_{\Sigma_m}$, que $[\![t]\!]^\rho_{I\!\!M} = t$ para cada $t \in TF^X_{\Sigma_m}$ e $\rho \in ATR_{I\!\!M}$.

Base: $[\![c]\!]^{I\!\!M}_\rho = I(c) = c$ para cada constante c.

Passo: $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^\rho_{I\!\!M} = I(f)([\![t_1]\!]^\rho_{I\!\!M}, \ldots, [\![t_n]\!]^\rho_{I\!\!M}) = I(f)([\![t_1]\!]^\rho_{I\!\!M}, \ldots, [\![t_n]\!]^\rho_{I\!\!M})$ e, usando a hipótese de indução, $f([\![t_1]\!]^\rho_{I\!\!M}, \ldots, [\![t_n]\!]^\rho_{I\!\!M}) = f(t_1, \ldots, t_n)$.

(iv) Prova-se que para cada fórmula fechada $\varphi \in F'^{X}_{\Sigma_m}$ se tem que $\varphi \in \Gamma_m$ ou $\neg\varphi \in \Gamma_m$. Suponha-se que $\varphi \notin \Gamma_m$ e admita-se, por absurdo, que $\Gamma_m \cup \{\varphi\}$ é coerente. Considere-se a teoria cujo conjunto de axiomas é $\Gamma_m \cup \{\varphi\}$, isto é, a teoria $\Gamma' = \{\gamma : \Gamma_m \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{N}'_c} \gamma$ e γ é fórmula fechada$\}$. Esta teoria é necessariamente coerente pois se $\Gamma' \vdash_{\mathcal{N}'_c} \perp$ então existiria $d' \in D_{\mathcal{N}'_c}$ tal que $conc(d') = \perp$ e $H_{d'} \subseteq \Gamma'$. Dado que cada fórmula de Γ' é por sua vez derivável a partir de $\Gamma_m \cup \{\varphi\}$ seria possível construir $d \in D_{\mathcal{N}'_c}$ tal que $conc(d) = \perp$ e $H_d \subseteq \Gamma_m \cup \{\varphi$. Assim $\Gamma_m \cup \{\varphi\}$ não seria coerente o que contradiz a assumpção inicial. Logo a teoria Γ' é coerente. O facto de $\Gamma_m \subset \Gamma'$ contradiz o facto de Γ_m ser teoria maximal coerente e portanto conclui-se que se $\varphi \notin \Gamma_m$ então $\Gamma_m \cup \{\varphi\}$ é necessariamente incoerente. Assim sendo, $\Gamma_m \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{N}'_c} \perp$ e, portanto, usando a regra $\rightarrow I$, conclui-se que $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}'_c} \neg\varphi$. Por definição de teoria, $\neg\varphi \in \Gamma_m$.

(v) Prova-se, por indução no conjunto das fórmulas fechadas $FF'^{X}_{\Sigma_m} \subseteq F'^{X}_{\Sigma_m}$ o seguinte resultado: para cada $\varphi \in FF'^{X}_{\Sigma_m}$, $\varphi \in \Gamma_m$ se e só se $I\!\!M \Vdash \varphi$ onde $I\!\!M = (U, I)$ é a estrutura de interpretação definida em (ii). No contexto desta prova, e tendo em conta o Corolário 3.3.23, sempre que se trabalhe com fórmulas fechadas, utilizar-se-á por vezes $I\!\!M \Vdash \varphi$ em vez de $I\!\!M, \rho \Vdash \varphi$.

Base: Há dois casos a considerar: (a) $\varphi = \perp$ e (b) $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$ com $P \in SP_n$, $n \in I\!\!N_0$ e $t_1, \ldots, t_n \in T^X_{\Sigma_m}$ termos fechados.

(a) Trivial porque, por um lado, $\perp \notin \Gamma_m$ pois Γ_m é coerente e, por outro, nenhuma estrutura de interpretação é modelo de $\perp$.

(b) Suponha-se que $P(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma_m$. Então, trivialmente, $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}'_c} P(t_1, \ldots, t_n)$. Por (ii) tem-se $I(P)(t_1, \ldots, t_n) = 1$. Por (iii) e definição de satisfação, $I\!\!M \Vdash P(t_1, \ldots, t_n)$.

Inversamente, se $I\!\!M \Vdash P(t_1, \ldots, t_n)$ então, por (iii) e definição de satisfação, $I(P)(t_1, \ldots, t_n) = 1$. Por (ii) tem-se $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}'_c} P(t_1, \ldots, t_n)$ e, por definição de teoria, $P(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma_m$.

Passo: Existem dois casos a considerar: (a) $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ e (b) $\varphi = \forall x\, \psi$.

(a) Suponha-se que $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Gamma_m$. Então $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}'_c} \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$. Se $I\!\!M \Vdash \varphi_2$ então obviamente $I\!\!M \Vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$. Se $I\!\!M \not\Vdash \varphi_2$ então, por hipótese de indução, $\varphi_2 \notin \Gamma_m$. Por (iv), $\neg\varphi_2 \in \Gamma_m$ logo $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}'_c} \neg\varphi_2$. É possível então mostrar (o que se deixa como exercício) que $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}'_c} \neg\varphi_1$. Assim, por definição de teoria, $\neg\varphi_1 \in \Gamma_m$. Se $I\!\!M \Vdash \varphi_1$, por hipótese de indução, $\varphi_1 \in \Gamma_m$ e portanto Γ_m seria incoerente o que contraria (i). Logo $I\!\!M \not\Vdash \varphi_1$ e portanto $I\!\!M \Vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$.

Inversamente, suponha-se que $I\!\!M \Vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$. Se $I\!\!M \Vdash \varphi_1$ então $I\!\!M \Vdash \varphi_2$

e, por hipótese de indução, $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi_2$. Usando a regra $\rightarrow I$, pode concluir-se que $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$. Por definição de teoria, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Gamma_m$. Suponha-se agora que $I\!\!M \not\Vdash \varphi_1$. Usando a hipótese de indução tem-se que $\Gamma_m \not\vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi_1$ e portanto $\varphi_1 \notin \Gamma_m$. Por (iv), $\neg\varphi_1 \in \Gamma_m$ e portanto $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}_c'} \neg\varphi_1$. É então possível mostrar (o que se deixa como exercício) que $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$. Por definição de teoria, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Gamma_m$.

(b) Suponha-se que $\forall x\, \psi \in \Gamma_m$. Então $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}_c'} \forall x\, \psi$. Usando a regra $\forall E$, tem-se que $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}_c'} [\psi]^x_t$ para cada termo fechado t. Tendo em conta que $\forall x\, \psi$ é fórmula fechada, $[\psi]^x_t$ é fórmula fechada. Por hipótese de indução, $I\!\!M \Vdash [\psi]^x_t$ para cada termo fechado t. Pelo Lema 3.3.29, (ii) e (iii), $I\!\!M \Vdash \forall x\, \psi$.

Inversamente, suponha-se que $I\!\!M \Vdash \forall x\, \psi$. Pelo Corolário 3.3.28, $I\!\!M \Vdash [\psi]^x_t$ para cada termo fechado $t \in T^X_{\Sigma_m}$. Deste modo, considerando em particular a testemunha c relativa a $\exists x(\neg\psi)$, tem-se que $I\!\!M \Vdash [\psi]^x_c$. Por hipótese de indução, $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}_c'} [\psi]^x_c$. Pelo facto de Γ_m ser uma teoria de Henkin, $(\exists x(\neg\psi)) \rightarrow (\neg[\psi]^x_c) \in \Gamma_m$ e portanto $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}_c'} (\exists x(\neg\psi)) \rightarrow (\neg[\psi]^x_c)$. É então possível mostrar (o que se deixa como exercício) que $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}_c'} [\psi]^x_c \rightarrow (\neg(\exists x(\neg\psi)))$ e que $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{N}_c'} \forall x\, \psi$. Por definição de teoria, $\forall x\, \psi \in \Gamma_m$.

(vi) De (v) tem-se que $I\!\!M \Vdash \Gamma_m$ e portanto, em particular $I\!\!M \Vdash \Phi$ obtendo-se assim o resultado pretendido. ∎

É possível provar agora um resultado de completude no caso em que estão envolvidas apenas fórmulas fechadas.

Proposição 3.4.41
Seja $\Phi \subseteq F'^X_\Sigma$ um conjunto de fórmulas fechadas e $\varphi \in F'^X_\Sigma$ uma fórmula fechada. Se $\Phi \models \varphi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi$.

Prova: Suponha-se que $\Phi \not\vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi$. Então $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é coerente (caso não fosse, seria possível mostrar que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi$). Pela Proposição 3.4.38, existe uma estrutura de interpretação tal que $I\!\!M \Vdash \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ e portanto $I\!\!M, \rho \Vdash \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ com $\rho \in ATR_{I\!\!M}$. Assim, $I\!\!M, \rho \Vdash \Phi$ e $I\!\!M, \rho \Vdash \neg\varphi$, ou seja, $I\!\!M, \rho \not\Vdash \varphi$. Consequentemente, $\Phi \not\models \varphi$. ∎

Como consequência da Proposição 3.4.41, podem agora provar-se um dos resultados de completude para o sistema de dedução natural $\mathcal{N}_c'$ mencionados no início da secção.

Proposição 3.4.42 Seja $\Phi \subseteq F'^X_\Sigma$ e $\varphi \in F'^X_\Sigma$. Se $\Phi \models \varphi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi$.

Prova: Se $\Phi \models \varphi$, pela Proposição 3.3.31, existe um subconjunto finito de Φ, $\Phi_0 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $n \in I\!\!N_0$, tal que $\Phi_0 \models \varphi$. Assim, sendo $\psi = \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow$

$(\ldots(\varphi_n \to \varphi)\ldots))$ tem-se que $\models \psi$. Pelo Lema 3.3.25, $\models Fch(\psi)$ onde $Fch(\psi)$ é o fecho universal de ψ. Pela Proposição 3.4.41, $\vdash_{\mathcal{N}_c'} Fch(\psi)$. Por aplicações sucessivas da regra $\forall E$ (no caso de ψ não ser fechada), é possível concluir que $\vdash_{\mathcal{N}_c'} \psi$. Então tem-se também $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi$ e portanto $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi$ como se pretendia. ∎

Corolário 3.4.43 Seja $\varphi \in F'{}^X_\Sigma$. Se $\models \varphi$ então $\vdash_{\mathcal{N}_c'} \varphi$.

Prova: Caso particular da Proposição 3.4.42 com $\Phi = \emptyset$. ∎

Exercício 3.4.44 Estenda a prova de completude de $\mathcal{N}_c'$ apresentada nesta subsecção de modo a obter uma prova de completude do sistema $\mathcal{N}_c$. ∎

3.5 Sistema dedutivo $\mathcal{S}_c$

Nesta secção apresenta-se um outro sistema dedutivo para a lógica de primeira ordem: o sistema de sequentes (por vezes também designado sistema de sequentes de Gentzen) ou cálculo de sequentes. Este sistema é, naturalmente, uma extensão do sistema de sequentes apresentado para o caso da lógica proposicional.

Os livros [8] e [12] são exemplos de textos onde se podem encontrar descrições do cálculo de sequentes para a lógica de primeira ordem. Existem na literatura diferentes sistemas de sequentes para a lógica de primeira ordem. O sistema apresentado na sequência é semelhante ao apresentado em [8].

3.5.1 Sequentes

Consideram-se fixados uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$ com $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e um conjunto numerável de variáveis X.

Definição 3.5.1 SEQUENTE
Um *sequente* sobre F_Σ^X é um par (Ant, Cns) onde $Ant, Cns \subseteq F_\Sigma^X$ são conjuntos finitos. O conjunto Ant é o *antecedente do sequente* e o conjunto Cns é o *consequente do sequente*.

O conjunto de todos sequentes sobre F_Σ^X designa-se por Sqt_Σ^X. ∎

Assumem-se todas as notações relativas a sequentes consideradas no âmbito do sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$.

Definição 3.5.2 SEQUENTE VÁLIDO E SEQUENTE FALSIFICÁVEL
Seja $Ant \Longrightarrow Cns$ em Sqt^X_Σ tal que $Ant = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ e $Cns = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$. Sejam ainda uma estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre Σ e uma atribuição $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$.

- $\mathbb{M}$ e ρ *satisfazem* $Ant \Longrightarrow Cns$, o que se denota por
$$\mathbb{M}, \rho \Vdash Ant \Longrightarrow Cns$$
se $\mathbb{M}, \rho \Vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$.

- $Ant \Longrightarrow Cns$ é *válido*, o que se denota por
$$\models Ant \Longrightarrow Cns$$
se, quaisquer que sejam a estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre Σ e $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ se tem que $\mathbb{M}, \rho \Vdash Ant \Longrightarrow Cns$.

- $Ant \Longrightarrow Cns$ é *falsificável*, se não é válido, isto é, se existe uma estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre Σ e $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ tal que
$$\mathbb{M}, \rho \not\Vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$$
ou seja,
$$\mathbb{M}, \rho \Vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge (\neg\psi_1) \wedge \ldots \wedge (\neg\psi_m)$$
(nestas condições diz-se que $\mathbb{M}$ e ρ *falsificam* o sequente).

  $Ant \Longrightarrow Cns$ é *falsificável* na estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ se existe $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ tal que $\mathbb{M}$ e ρ falsificam o sequente. ■

Como é natural, as observações apresentadas anteriormente no contexto do sistema $\mathcal{S}_p$ sobre a forma como se podem interpretar os sequentes podem também ser aplicadas ao caso dos sequentes que acima se definiram.

3.5.2 Sistema dedutivo

Nesta secção apresenta-se o sistema dedutivo $\mathcal{S}_c$. Este sistema pode ser visto como uma extensão do sistema $\mathcal{S}_p$ apresentado para o caso da lógica proposicional no qual, para além das regra relativas aos conectivos, ter-se-ão também regras relativas aos quantificadores.

Definição 3.5.3 SISTEMA $\mathcal{S}_c$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{S}_c$ é constituído por
Axiomas:

- $\varphi, \Phi \Longrightarrow \varphi, \Psi$ $\quad Ax$
- $\perp, \Phi \Longrightarrow \Psi$ $\quad \perp E$

onde Φ e Ψ representam subconjuntos de F_Σ^X e φ representa uma fórmula em F_Σ^X.
Regras de inferência:

- Regra $\forall E$

$$\frac{[\varphi]_t^x, \forall x\, \varphi, \Phi \Longrightarrow \Psi}{\forall x\, \varphi, \Phi \Longrightarrow \Psi}$$

  onde t é um termo livre para x em φ

- Regra $\forall D$

$$\frac{\Phi \Longrightarrow \Psi, [\varphi]_y^x}{\Phi \Longrightarrow \Psi, \forall x\, \varphi}$$

  onde $y \in X$, $y \notin VL(\Phi \cup \Psi)$ e $y \notin VL(\varphi) \setminus \{x\}$

- Regra $\exists E$

$$\frac{[\varphi]_y^x, \Phi \Longrightarrow \Psi}{\exists x\, \varphi, \Phi \Longrightarrow \Psi}$$

  onde $y \in X$, $y \notin VL(\Phi \cup \Psi)$ e $y \notin VL(\varphi) \setminus \{x\}$

- Regra $\exists D$

$$\frac{\Phi \Longrightarrow \Psi, [\varphi]_t^x, \exists x\, \varphi}{\Phi \Longrightarrow \Psi, \exists x\, \varphi}$$

- regras $\wedge E$, $\wedge D$, $\vee E$, $\vee D$, $\to E$ e $\to D$ (com definição análoga à apresentada para as regras com o mesmo nome no contexto do sistema $\mathcal{S}_p$)

onde Φ, Ψ representam subconjuntos de F_Σ^X e φ representa uma fórmula em F_Σ^X.

Assumem-se as noções introduzidas no âmbito do sistema $\mathcal{S}_p$ nomeadamente as noções de conclusão, premissas, fórmula principal, fórmula secundária (no caso das regras relativas ao conectivos), regra unária e regra binária (as novas regras introduzidas são todas unárias). A fórmula secundária no caso das regras relativas aos quantificadores é a fórmula que está representada explicitamente na premissa mas não está explicitamente representada na conclusão.

A variável y explicitamente referida nas regras $\forall D$ e $\exists E$ é a *variável própria da regra*. O termo t explicitamente referido nas regras $\forall E$ e $\exists D$ é o *termo próprio da regra*. Recorde-se que a notação $[\varphi]_y^x$ ($[\varphi]_t^x$) representa que y (t) é livre para x em φ.
■

Relativamente à regra $\forall E$, pode não ser claro o motivo pelo qual a fórmula $\forall x\, \varphi$ ocorre na premissa e na conclusão. Nos Exemplos 3.5.6 e 3.5.7 são descritas situações que ilustram o facto de tal ser necessário, nesta formulação do sistema $\mathcal{S}_c$. Idênticos comentários poderiam ser feitos relativamente à regra $\exists D$ e à fórmula $\exists x\, \varphi$.

No contexto do sistema $\mathcal{S}_c$ as deduções ou árvores de dedução são novamente árvores cujas etiquetas são sequentes e que são construídas utilizando os axiomas e as regras de inferência relativa aos conectivos e quantificadores. As árvores de prova são árvores de dedução cujas folhas correspondem sempre a axiomas.

Definição 3.5.4 Árvores de dedução e árvores de prova de $\mathcal{S}_c$
O conjunto das *deduções* ou *árvores de dedução de* $\mathcal{S}_c$ denota-se por $D_{\mathcal{S}_c}$ e define-se indutivamente à semelhança do conjunto $D_{\mathcal{S}_p}$ usando agora as regras de inferência do sistema $\mathcal{S}_c$. De novo, o sequente que constitui a etiqueta da raiz de uma árvore de dedução $d \in D_{\mathcal{S}_c}$ é a *conclusão* da árvore de dedução e denota-se por $conc(d)$.

O conjunto $D_{\mathcal{S}_c^{\vdash}}$ das *árvores de prova de* $\mathcal{S}_c$ tem definição análoga à do conjunto $D_{\mathcal{S}_p^{\vdash}}$. ∎

Seguem-se alguns exemplos de árvores de dedução de $\mathcal{S}_c$. Todas as observações referidas no âmbito de $\mathcal{S}_p$ relativas a derivações e provas são também válidas no caso do sistema $\mathcal{S}_c$.

Exemplo 3.5.5 Apresenta-se seguidamente uma dedução em $D_{\mathcal{S}_c}$ onde P é um símbolo de predicado de aridade 0 e Q é um símbolo de predicado unário. As regras de inferência utilizadas são indicadas à direita dos traços horizontais que separam cada nó dos seus sucessores.

$$\begin{array}{cl}
\Longrightarrow (\exists x\ (P \to Q(x))) \to (P \to (\exists z\ Q(z))) & \\
\hline
\exists x\ (P \to Q(x)) \Longrightarrow P \to (\exists z\ Q(z)) & \to D \\
\hline
P \to Q(y_1) \Longrightarrow P \to (\exists z\ Q(z)) & \exists E \\
\hline
P \to Q(y_1), P \Longrightarrow \exists z\ Q(z) & \to D \\
\hline
\begin{array}{cc}
P \Longrightarrow P, \exists z\ Q(z) & \begin{array}{cl} Q(y_1), P \Longrightarrow \exists z\ Q(z) & \\ \hline Q(y_1), P \Longrightarrow Q(y_1), \exists z\ Q(z) & \exists D \end{array}
\end{array} & \to E
\end{array}$$

A conclusão da árvore de dedução é $\Longrightarrow (\exists x\ (P \to Q(x))) \to (P \to (\exists z\ Q(z)))$. Todas as folhas da árvore correspondem a axiomas. ∎

Os exemplos seguintes ilustram situações que justificam a necessidade de na regra $\forall E$ a premissa conter a fórmula principal da regra (a fórmula universalmente quantificada). Exemplos similares podem ser apresentados para justificar a situação semelhante que ocorre na regra $\exists D$.

Exemplo 3.5.6 Na dedução seguinte P e Q são símbolos de predicado unários e $\varphi = \forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

$$\begin{array}{cl}
\Longrightarrow ((\forall x\ (P(x) \to Q(x))) \wedge (P(a) \wedge P(b))) \to (Q(a) \wedge Q(b)) & \\ \hline
(\forall x\ (P(x) \to Q(x))) \wedge (P(a) \wedge P(b)) \Longrightarrow Q(a) \wedge Q(b) & \to D \\ \hline
\forall x\ (P(x) \to Q(x)), P(a) \wedge P(b) \Longrightarrow Q(a) \wedge Q(b) & \wedge E \\ \hline
\forall x\ (P(x) \to Q(x)), P(a), P(b) \Longrightarrow Q(a) \wedge Q(b) & \wedge E \\ \hline
P(a) \to Q(a), \varphi, P(a), P(b) \Longrightarrow Q(a) \wedge Q(b) & \forall E \\ \hline
\varphi, P(a), P(b) \Longrightarrow Q(a) \wedge Q(b), P(a) \qquad Q(a), \varphi, P(a), P(b) \Longrightarrow Q(a) \wedge Q(b) & \to E
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
Q(a), \varphi, P(a), P(b) \Longrightarrow Q(a) \wedge Q(b) & \\ \hline
Q(a), \varphi, P(a), P(b) \Longrightarrow Q(b) \qquad Q(a), \varphi, P(a), P(b) \Longrightarrow Q(a) & \wedge D
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
Q(a), \varphi, P(a), P(b) \Longrightarrow Q(b) & \\ \hline
Q(a), P(b) \to Q(b), \varphi, P(a), P(b) \Longrightarrow Q(b) & \forall E \\ \hline
Q(a), Q(b), \varphi, P(a), P(b) \Longrightarrow Q(b) \qquad Q(a), \varphi, P(a), P(b) \Longrightarrow Q(b), P(b) & \to E
\end{array}$$

A conclusão é $\Longrightarrow ((\forall x\ (P(x) \to Q(x))) \wedge (P(a) \wedge P(b))) \to (Q(a) \wedge Q(b))$ e todas as folhas da árvore correspondem a axiomas. Note-se que nesta dedução foi necessário aplicar duas vezes a regra $\forall E$ à fórmula $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$, sem o que não se conseguiria construir uma árvore de prova. Numa das vezes, foi necessário substituir a variável x pela constante a e, na outra, pela constante b. Se, na primeira aplicação da regra, a fórmula $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$ não estivesse presente na premissa, já não seria possível a segunda aplicação da regra. ∎

Exemplo 3.5.7 Na dedução seguinte P é um símbolo de predicado unário, f é um símbolo de função unário e $\varphi = \forall x\ (P(x) \to P(f(x)))$.

$$\begin{array}{cl}
\Longrightarrow (\forall x\ (P(x) \to P(f(x)))) \to (P(a) \to P(f(f(a)))) & \\ \hline
\forall x\ (P(x) \to P(f(x))) \Longrightarrow P(a) \to P(f(f(a))) & \to D \\ \hline
\forall x\ (P(x) \to P(f(x))), P(a) \Longrightarrow P(f(f(a))) & \to D \\ \hline
P(a) \to P(f(a)), \varphi, P(a) \Longrightarrow P(f(f(a))) & \forall E
\end{array}$$

$$
\begin{array}{c}
\overline{\hspace{22em}}\ \to E \\
\varphi, P(a) \Longrightarrow P(f(f(a))), P(a) \qquad P(f(a)), \varphi, P(a) \Longrightarrow P(f(f(a))) \\
\overline{\hspace{16em}}\ \forall E \\
P(f(a)), P(f(a)) \to P(f(f(a))), \varphi, P(a) \Longrightarrow P(f(f(a))) \\
\overline{\hspace{22em}}\ \to E \\
\begin{array}{c} P(f(a)), P(f(f(a))), \varphi, P(a) \\ \Longrightarrow P(f(f(a))) \end{array} \qquad \begin{array}{c} P(f(a)), \varphi, P(a) \\ \Longrightarrow P(f(f(a))), P(f(a)) \end{array}
\end{array}
$$

A conclusão é $\Longrightarrow (\forall x\ (P(x) \to P(f(x)))) \to (P(a) \to P(f(f(a))))$. Todas as folhas da árvore correspondem a axiomas. De novo foi necessário aplicar duas vezes a regra $\forall E$ à fórmula $\forall x\ (P(x) \to P(f(x)))$. Neste caso, houve que substituir x por dois termos diferentes: a e $f(a)$. ■

Definição 3.5.8 Teorema de $\mathcal{S}_c$
O sequente $\Phi \Longrightarrow \Psi$ é teorema de $\mathcal{S}_c$, o que se denota por

$$\vdash_{\mathcal{S}_c} \Phi \Longrightarrow \Psi$$

se $\Phi \Longrightarrow \Psi$ tem uma prova em $\mathcal{S}_c$. ■

Exemplo 3.5.9 As conclusões das árvores de dedução apresentadas nos exemplos 3.5.5, 3.5.6 e 3.5.7 são teoremas de $\mathcal{S}_c$. ■

A construção de derivações em $\mathcal{S}_c$ pode ser naturalmente efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*. O leitor interessado poderá consultar desde já o capítulo **??** no qual se apresentam os conceitos relevantes para a representação de sistemas que envolvam linguagens de primeira ordem.

3.5.3 Correcção e completude de $\mathcal{S}_c$

Nesta secção apresentam-se os resultados de correcção e completude do sistema $\mathcal{S}_c$. As provas das proposições enunciadas podem ser encontradas, por exemplo, em [8]. De acordo com o que tem vindo a ser exposto, os resultados de correcção e completude correspondem, em rigor, a correcção e completude fracas. No entanto, por motivos análogos aos já explicados no caso de $\mathcal{S}_p$, usam-se simplesmente as designações correcção e completude.

Começa-se por apresentar o resultado de correcção do sistema dedutivo $\mathcal{S}c$, ou seja, o resultado que estabelece que todo o teorema de $\mathcal{S}_c$ é um sequente válido (Proposição 3.5.12). Como se espera, este resultado decorre do facto de todos axiomas serem válidos (Proposição 3.5.10) e das regras de inferência serem correctas (Proposição 3.5.11).

Proposição 3.5.10
Os axiomas de $\mathcal{S}_c$ são sequentes válidos.

Prova: A prova é semelhante à apresentada no caso do sistema $\mathcal{S}_p$. ∎

Proposição 3.5.11
As regras de inferência de $\mathcal{S}_c$ são correctas, ou seja, se todas as premissas de uma regra são sequentes válidos então a conclusão dessa regra é sequente válido. ∎

Proposição 3.5.12
O sistema dedutivo $\mathcal{S}_c$ é correcto:

$$\text{se } \vdash_{\mathcal{S}_c} \Phi \Longrightarrow \Psi \text{ então } \models \Phi \Longrightarrow \Psi$$

isto é, se um sequente é teorema de $\mathcal{S}_c$ então o sequente é válido.

Prova: A prova é semelhante à apresentada no caso da correcção do sistema $\mathcal{S}_p$, recorrendo agora às Proposições 3.5.10 e 3.5.11. ∎

Corolário 3.5.13
Seja $\varphi \in F_\Sigma^X$. Se o sequente $\Longrightarrow \varphi$ é teorema de $\mathcal{S}_c$ então φ é uma fórmula válida. ∎

Apresenta-se agora o resultado de completude para o sistema $\mathcal{S}_c$. A prova deste resultado é consideravelmente mais elaborada que a apresentada no caso da completude do sistema $\mathcal{S}_c$. O leitor interessado poderá consultar, por exemplo, [8].

Proposição 3.5.14
Seja $\Phi \Longrightarrow \Psi$ em Sqt_Σ^X tal que são disjuntos os conjuntos $VM(\Phi \cup \Psi)$ e $VL(\Phi \cup \Psi)$. Se $\models \Phi \Longrightarrow \Psi$ então $\vdash_{\mathcal{S}_c} \Phi \Longrightarrow \Psi$. ∎

A condição referida na Proposição 3.5.14 visa assegurar que, no decorrer do procedimento de construção de derivações considerado na prova do resultado, os termos próprios das regras $\forall E$ e $\exists D$ utilizados são sempre livres para a substituição. Note-se que a referida condição não constitui uma restrição significativa, no sentido em que, dado que para cada fórmula é sempre possível arranjar uma fórmula logicamente equivalente à primeira em que o nome das variáveis mudas é diferente (ver Lema 3.3.24).

Termina-se esta secção com algumas observações relativas à não decidibilidade da lógica de primeira ordem. Ao contrário do que acontecia no caso da lógica proposicional, as propriedades do sistema $\mathcal{S}_c$ que se estudaram ao longo desta secção não permitem construir, com base neste sistema, um algoritmo de decisão para a lógica de primeira ordem, mais precisamente, para o problema de saber se uma fórmula de primeira ordem é ou não válida. Com efeito, a prova de completude envolve um procedimento para construir árvores de dedução (ver, por exemplo, [8]) que, ao contrário do que acontecia no caso da lógica proposicional, pode não terminar, e portanto, não constitui um algoritmo (de decisão).

Como é evidente, apenas pelo facto de o procedimento referido não permitir concluir que a lógica de primeira ordem é decidível, não significa por si só que a lógica de primeira ordem não o seja. A procura de um procedimento de decisão para a lógica de primeira ordem ocupou muitos matemáticos por mais de vinte anos a partir de 1917, ano em que D. Hilbert propôs este problema (um dos célebres 23 problemas por ele propostos[4]). Em 1936, A. Church demonstrou que *a lógica de primeira ordem não é decidível*, isto é, que não existe nenhum algoritmo que, dada uma qualquer fórmula de primeira ordem, termine sempre com uma resposta afirmativa ou uma resposta negativa à questão de saber se a fórmula é válida ou não.

Curiosamente, também em 1936, A. Turing apresentou um resultado, que embora por uma via diferente, também permite concluir que a lógica de primeira ordem não é decidível. O resultado em causa, conhecido por problema da terminação, estabelece que não é possível determinar se uma computação arbitrária numa máquina de Turing arbitrária termina ou não.

Voltando ao sistema dedutivo $\mathcal{S}_c$, pode mostrar-se que o procedimento de construção de árvores de dedução termina sempre que o sequente dado é válido. Deste

[4]Em 1917, D. Hilbert expôs à comunidade matemática 23 problemas/questões que à data ainda não tinham solução/resposta conhecida. Eram questões por ele consideradas fundamentais para o desenvolvimento da matemática e desafiou os matemáticos a devotarem as suas energias à resolução dessas questões.

modo, dada uma fórmula de primeira ordem, se esta for válida é possível determinar em tempo finito que ela o é. Designa-se esta propriedade por *semidecibilidade da lógica de primeira ordem.*

Exercícios

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos.

Exercício 3.5.15 Na sequência ψ_1 e ψ_2 designam fórmulas arbitrárias de F_Σ^X enquanto que P, Q e R designam símbolos de predicado. Mostre que:

1. $\vdash_{\mathcal{S}_c} \Longrightarrow (\forall x\, \psi_1) \to (\exists x\, \psi_1)$
2. $\vdash_{\mathcal{S}_c} \Longrightarrow (\forall x(\forall y\, P(x,y))) \to (\forall y(\forall x\, P(x,y)))$
3. $\vdash_{\mathcal{S}_c} \Longrightarrow (\exists x(\exists y\, P(x,y))) \to (\exists y(\exists x\, P(x,y)))$
4. $\vdash_{\mathcal{S}_c} \Longrightarrow (\forall x\, Q(x)) \to (\neg(\exists x\, \neg Q(x)))$
5. $\vdash_{\mathcal{S}_c} \Longrightarrow (\exists x\, Q(x)) \to (\neg(\forall x\, (\neg Q(x))))$
6. $\vdash_{\mathcal{S}_c} \Longrightarrow (\forall x\, (\psi_1 \to \psi_2)) \to ((\forall x\, \psi_1) \to (\forall x\, \psi_2))$
7. $\vdash_{\mathcal{S}_c} \Longrightarrow ((\forall x\, \psi_1) \wedge (\forall x\, \psi_2)) \to (\forall x\, (\psi_1 \wedge \psi_2))$
8. $\vdash_{\mathcal{S}_c} \Longrightarrow ((\forall x\, \psi_1) \vee (\forall x\, \psi_2)) \to (\forall x\, (\psi_1 \vee \psi_2))$
9. $\vdash_{\mathcal{S}_c} \Longrightarrow ((\exists x\, \psi_1) \vee (\exists x\, \psi_2)) \to (\exists x\, (\psi_1 \vee \psi_2))$
10. $\vdash_{\mathcal{S}_c} \Longrightarrow (\exists x\, (\psi_1 \wedge \psi_2)) \to ((\exists x\, \psi_1) \wedge (\exists x\, \psi_2))$ ■

Exercício 3.5.16 Após a leitura do capítulo **??**, volte a resolver os exercícios anteriores usando a ferramenta *Isabelle.* ■

Exercício 3.5.17 Apresente uma prova para a Proposição 3.5.11. ■

3.6 Sistema dedutivo $\mathcal{T}_c$

Nesta secção apresenta-se mais um sistema dedutivo para a lógica de primeira ordem: um sistema de *tableaux* (aqui designado $\mathcal{T}_c$). Este sistema é, naturalmente, uma extensão do sistema $\mathcal{T}_p$ apresentado para a lógica proposicional.

Os livros [2, 6, 7, 3, 1] são exemplos de textos onde se podem encontrar descrições de sistemas de *tableaux* para a lógica de primeira ordem (entre outras). Existes algumas diferenças entre os sistemas apresentados nestes textos. O sistema apresentado na sequência é semelhante ao apresentado em [2], por exemplo.

3.6.1 Sistema dedutivo

Consideram-se fixados uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$ com $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e um conjunto numerável de variáveis X. Tal como no caso da lógica proposicional, opta-se aqui também por considerar a negação como conectivo primitivo neste texto. Deste modo, a linguagem de primeira ordem considerada nesta secção é definida como anteriormente mas, como se disse, considerando $\neg$ como conectivo primitivo.

Definição 3.6.1
$F^{\neg}_{\Sigma,X}$ é o conjunto de fórmulas de primeira ordem sobre Σ e X definido como anteriormente mas com $\neg$ como conectivo primitivo. ■

Consideram-se todas as notações relativas a *tableaux* anteriormente introduzidas na secção **??**.

À semelhança do caso proposicional, um *tableau* é uma árvore etiquetada em $\mathcal{P}(F^{\neg}_{\Sigma,X})$, isto é, uma árvore cujas etiquetas dos nós são conjuntos de fórmulas em $F^{\neg}_{\Sigma,X}$. Estas árvores são de novo construídas partindo de uma árvore singular e aplicando sucessivamente certas regras de inferência. As regras são agora, para além de $\wedge$, $\neg\wedge$, $\vee$, $\neg\vee$, $\rightarrow$, $\neg\rightarrow$ e $\neg\neg$, as regras $\forall$, $\neg\forall$, $\exists$ e $\neg\exists$.

Os *tableaux* de $\mathcal{T}_c$ constroem-se tal como os de $\mathcal{T}_c$. As novas regras são unárias, no sentido em que a aplicação de cada uma delas a um *tableau* t acrescenta um nó sucessor à folha de um certo ramo de t, e a aplicação de cada regra depende da existência de uma dada fórmula na etiqueta de um nó de t.

O sistema $\mathcal{T}_c$ é, de novo, um sistema de *refutação*. Cada ramo de um *tableau* t corresponde a uma tentativa de mostrar que o conjunto de fórmulas Φ correspondente à raiz de t é possível. Quando todas as tentativas falham, pode concluir-se Φ não é possível.

Regras de inferência de $\mathcal{T}_c$:
A representação usual das regras acima referidas é semelhante à apresentada no caso de $\mathcal{T}_p$. As regras $\wedge$, $\neg\wedge$, $\vee$, $\neg\vee$, $\rightarrow$, $\neg\rightarrow$ e $\neg\neg$ são análogas às de $\mathcal{T}_p$. Seguem-se as regras relativas aos quantificadores:

<u>regra $\forall$</u>

$$\frac{\forall x\,\varphi}{[\varphi]^x_t}\;\forall$$

<u>regra $\neg\forall$</u>

$$\frac{\neg(\forall x\,\varphi)}{\neg([\varphi]^x_y)}\;\neg\forall$$

<u>regra $\exists$</u>

$$\frac{\exists x\,\varphi}{[\varphi]^x_y}\;\exists$$

<u>regra $\neg\exists$</u>

$$\frac{\neg(\exists x\,\varphi)}{\neg([\varphi]^x_t)}\;\neg\exists$$

sendo que nas regras $\neg\forall$ e $\exists$ se exige que y não pertença às variáveis livres das fórmulas presentes no ramo que vai ser modificado por aplicação das regras.

As regras de inferência acima referidas podem ser definidas de modo mais rigoroso como se segue. São utilizadas todas as notações já anteriormente introduzidas.

Definição 3.6.2 Sistema $\mathcal{T}_c$
O sistema $\mathcal{T}_c$ é constituído pelas regras de inferência seguintes. No que se segue, r_a denota um ramo de uma $\mathcal{P}(F^{\neg}_{\Sigma,X})$-árvore a, $t \in T^X_\Sigma$ e $y \in X$.

- <u>Regra $\forall$</u>: se $\forall x\,\varphi \in F(r_a)$ então, *por aplicação da regra* $\forall$, obtém-se a $\mathcal{P}(F^{\neg}_{\Sigma,X})$-árvore $a[r_a;\{[\varphi]^x_t\}]$;
- <u>Regra $\neg\forall$</u>: se $\neg(\forall x\,\varphi) \in F(r_a)$ e $y \notin VL(F(r_a))$ então, *por aplicação da regra* $\neg\forall$, obtém-se a $\mathcal{P}(F^{\neg}_{\Sigma,X})$-árvore $a[r_a;\{\neg([\varphi]^x_y)\}]$;
- <u>Regra $\exists$</u>: se $\exists x\,\varphi \in F(r_a)$ e $y \notin VL(F(r_a))$ então, *por aplicação da regra* $\exists$, obtém-se a $\mathcal{P}(F^{\neg}_{\Sigma,X})$-árvore $a[r_a;\{[\varphi]^x_y\}]$;

- <u>Regra $\neg\exists$</u>: se $\neg(\exists x\,\varphi) \in F(r_a)$ então, *por aplicação da regra* $\neg\exists$, obtém-se a $\mathcal{P}(F^{\neg}_{\Sigma,X})$-árvore $a[r_a;\{\neg([\varphi]^x_t)\}]$;
- as regras $\wedge$, $\neg\wedge$, $\vee$, $\neg\vee$, $\to$, $\neg\to$ e $\neg\neg$ têm definição análoga à apresentada para as regras com o mesmo nome no contexto do sistema $\mathcal{T}_p$.

As regras $\wedge$, $\neg\vee$, $\neg\to$, $\neg\neg$, $\forall$, $\neg\forall$, $\exists$ e $\neg\exists$. são regras *unárias* e as outras são regras *binárias.* A variável y explicitamente referida nas regras $\neg\forall$ e $\exists$ é a *variável crítica* da regra. ■

Seguem-se agora a definição do sistema dedutivo $\mathcal{T}_c$.

Definição 3.6.3 Sistema $\mathcal{T}_c$ e tableaux de $\mathcal{T}_c$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{T}_c$ é constituído pelas regras de inferência $\wedge$, $\neg\wedge$, $\vee$, $\neg\vee$, $\to$, $\neg\to$, $\neg\neg$, $\forall$, $\neg\forall$, $\exists$ e $\neg\exists$ apresentadas na Definição 3.6.2.

O conjunto dos *tableaux* de $\mathcal{T}_c$ define-se à semelhança do conjunto $\mathcal{T}_p$. De novo se t é um tableau de $\mathcal{T}_c$ e Φ é a etiqueta da raiz de t, diz-se que *t é uma tableau para* Φ. Se Φ é um conjunto singular $\{\varphi\}$ diz-se também que *t é uma tableau para φ.* ■

Segue-se um exemplo de um *tableau* em $\mathcal{T}_c$.

Exemplo 3.6.4 Apresenta-se seguidamente um exemplo de um *tableau* de $\mathcal{T}_c$ onde P é um símbolo de predicado de aridade 0 e Q é um símbolo de predicado unário. As regras de inferência utilizadas são indicadas, como é usual, à direita dos traços horizontais que separam cada nó dos seus sucessores.

$$\dfrac{\neg((\exists x\,(P\to Q(x)))\to(P\to(\exists z\,Q(z))))}{\dfrac{\exists x\,(P\to Q(x)),\ \neg(P\to(\exists z\,Q(z)))}{\dfrac{P\to Q(y)}{\dfrac{P,\ \neg(\exists z\,Q(z))}{\neg P \qquad\qquad \dfrac{Q(y)}{\neg Q(y)}\,\neg\exists}\,\to}\,\neg\to}\,\exists}\,\neg\to$$

Este é um *tableau* para $\neg((\exists x\,(P \to Q(x))) \to (P \to (\exists z\, Q(z))))$. ∎

Definição 3.6.5 Tableau fechado, aberto e conjunto confutado
As noções de ramo fechado, ramo aberto, *tableau* fechado, *tableau* aberto e conjunto confutado são análogas às apresentadas na Definição **??** e na Definição **??**. ∎

Exemplo 3.6.6 O *tableau* apresentado no Exemplo 3.6.4 é fechado e portanto o conjunto $\{\neg((\exists x\,(P \to Q(x))) \to (P \to (\exists z\, Q(z))))\}$ é confutado. ∎

À semelhança do que acontecia no contexto do sistema $\mathcal{T}_p$, mostra-se que um conjunto Φ confutado é um conjunto impossível. Cada ramo r de um *tableau* corresponde a uma tentativa de encontrar uma estrutura de interpretação (e uma atribuição) que satisfaça Φ. Um ramo fechado corresponde de novo a uma tentativa falhada Se todos os ramos de um *tableau* t para Φ são fechados isso significa que todas as tentativas falharam e, portanto, Φ não é possível. No caso particular de $\Phi = \{\neg\varphi\}$, a fórmula φ é válida.

Tal como no caso do sistema $\mathcal{T}_p$, construção de derivações em $\mathcal{T}_c$ pode ser efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*. O leitor interessado poderá consultar desde já o capítulo **??** no qual se apresentam os conceitos relevantes para a representação de sistemas que envolvam linguagens de primeira ordem.

3.6.2 Correcção e completude de $\mathcal{T}_c$

Neste secção apresentam-se os resultados de correcção e completude do sistema $\mathcal{T}_c$.

Tal como no caso do sistema $\mathcal{T}_p$, o resultado de correcção do sistema $\mathcal{T}_c$ estabelece que todo o conjunto confutado é um conjunto impossível (Corolário 3.6.10). A estrutura da prova é semelhante à apresentada no caso de $\mathcal{T}_p$.

Proposição 3.6.7
Se t é um *tableau* de $\mathcal{T}_c$ e r é um ramo de t fechado então $F(r)$ é impossível.

Prova: Trivial tendo em conta a definição de ramo fechado. ∎

Proposição 3.6.8
As regras de inferência de $\mathcal{T}_c$ são correctas, o que, neste contexto, significa que se t é um *tableau* de $\mathcal{T}_c$ e existe um ramo r de t tal que $F(r)$ é possível então, se t' é

um *tableau* obtido a partir de t por aplicação de uma das regras de inferência de $\mathcal{T}_c$, existe também um ramo r' de t' tal que $F(r')$ é possível. ■

A prova pode ser encontrada em [2].

Proposição 3.6.9
Seja t um *tableau* de $\mathcal{T}_c$ para Φ.

1. Se Φ é possível então existe uma ramo r de t tal que $F(r)$ é possível.

2. Se t é fechado então Φ é impossível.

Prova: 1. A prova decorre por indução no conjunto (indutivamente definido) dos *tableaux* de $\mathcal{T}_c$.

Base: Imediato dado que t é um tableau singular para Φ e portanto o seu único ramo r é tal que $F(r) = \Phi$.

Passo: A prova faz-se considerando as diferentes regras de inferência e usando a Proposição 3.6.8.

2. Imediato a partir de 1. ■

Corolário 3.6.10
O sistema dedutivo $\mathcal{T}_c$ é correcto, isto é, se $\Phi \subseteq F^{\neg}_{\Sigma,X}$ é confutado então Φ é impossível.

Prova: Se Φ é confutado existe um *tableau* fechado para Φ. Pela Proposição **??**, Φ é um conjunto impossível. ■

Proposição 3.6.11
Sejam $\Phi \subseteq\in F^{\neg}_{\Sigma,X}$ e finito e $\varphi \in F^{\neg}_{\Sigma,X}$.

1. Se $\{\neg\varphi\}$ é confutado então $\models \varphi$.

2. Se $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é confutado então $\Phi \models \varphi$. ■

Faz-se agora referência ao resultado de completude do sistema $\mathcal{T}_c$. A prova pode ser feita adaptando a apresentada em [2], ou mesmo adaptando a apresentada [8] para o sistema com sequentes.

Proposição 3.6.12
Seja $\Phi \subseteq F^{\neg}_{\Sigma,X}$ finito e tal que $VM(\Phi) \cap VL(\Phi) = \emptyset$. Se Φ é impossível então Φ é confutado. ■

Proposição 3.6.13
Sejam $\Phi \subseteq\in F^{\neg}_{\Sigma,X}$ finito e $\varphi \in F^{\neg}_{\Sigma,X}$ tais que $VM(\varphi) \cap VL(\varphi) = \emptyset$ e $VM(\Phi \cup \{\varphi\}) \cap VL(\cup\{\varphi\}) = \emptyset$.

1. Se $\models \varphi$ então $\{\neg\varphi\}$ é confutado.
2. Se $\Phi \models \varphi$ então $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é confutado. ■

Naturalmente, observações semelhantes às apresentadas após a Proposição 3.5.14 são também adequadas neste ponto.

Exercícios

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos nesta secção.

Exercício 3.6.14 Na sequência ψ_1, ψ_2 designam fórmulas de F^X_Σ e P, Q designam símbolos de predicado. Mostre que os seguintes conjuntos são conjuntos confutados. Para cada caso diga o que pode ser concluído sobre a validade da fórmula envolvida, no caso de conjuntos singulares e o que pode ser concluído sobre consequência semântica entre as fórmulas envolvidas, nos outros casos.

1. $\{\neg(\forall x\, \psi_1) \to (\exists x\, \psi_1))\}$
2. $\{\forall x(\forall y\, P(x,y)), \neg(\forall y(\forall x\, P(x,y)))\}$
3. $\{\exists x(\exists y\, P(x,y)), \neg(\exists y(\exists x\, P(x,y)))\}$
4. $\{\neg((\forall x\, Q(x)) \to (\neg(\exists x\, \neg Q(x))))\}$
5. $\{(\forall x\,(\psi_1 \to \psi_2)), \neg((\forall x\, \psi_1) \to (\forall x\, \psi_2))\}$
6. $\{\neg(((\forall x\, \psi_1) \wedge (\forall x\, \psi_2)) \to (\forall x\,(\psi_1 \wedge \psi_2)))\}$
7. $\{\neg(((\forall x\, \psi_1) \vee (\forall x\, \psi_2)) \to (\forall x\,(\psi_1 \vee \psi_2)))\}$
8. $\{\neg(((\exists x\, \psi_1) \vee (\exists x\, \psi_2)) \to (\exists x\,(\psi_1 \vee \psi_2)))\}$

9. $\{\neg((\exists x\,(\psi_1 \wedge \psi_2)) \to ((\exists x\,\psi_1) \wedge (\exists x\,\psi_2)))\}$ ∎

Exercício 3.6.15 Após a leitura do capítulo **??**, volte a resolver os exercícios anteriores usando a ferramenta *Isabelle*. ∎

Exercício 3.6.16 Apresente uma prova para a Proposição 3.6.8. ∎

3.7 Sistema dedutivo $\mathcal{H}_c$

O sistema dedutivo $\mathcal{H}_c$ é um sistema dedutivo para a lógica de primeira ordem (clássica). É um sistema de tipo Hilbert semelhante ao apresentado para a lógica proposicional. É constituído por um conjunto de axiomas (esquema) e por duas regras de inferência (o *modus ponens* tal como no caso proposicional e uma regra relacionada com os quantificadores universais). Tal como no caso proposicional, existem na literatura diversos sistemas deste tipo. Nas próximas secções seguem-se as opções tomadas, por exemplo, em [9] e [10].

3.7.1 Sistema dedutivo

Consideram-se fixados uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$ com $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ e um conjunto numerável de variáveis X. Assume-se ainda que se trabalha com o conjunto de fórmulas F'^X_Σ definido anteriormente e com o conjunto de termos T'^X_Σ. Recorde-se que neste caso apenas se assumem como primitivos $\perp$, o conectivo $\to$ e o quantificador $\forall$. Recorde-se também a notação 3.2.24.

Definição 3.7.1 SISTEMA DEDUTIVO $\mathcal{H}_c$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{H}_c$ é constituído por

Axiomas:

- $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_1)$ A1
- $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_3))$ A2
- $\perp \to \varphi_1$ A3
- $(\neg(\neg\varphi_1)) \to \varphi_1$ A4

- $(\forall x\, \varphi) \to [\varphi]^x_t$ A5
- $(\forall x\, (\varphi_2 \to \varphi_1)) \to (\varphi_2 \to (\forall x\, \varphi_1))$ A6
  $x \notin VL(\varphi_2)$

onde $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ representam fórmulas arbitrárias em F'^X_Σ, $x, y \in X$ e t representa um termo arbitrário em T'^X_Σ.

Regras de inferência:

- MP (*modus ponens*)

$$\frac{\varphi_1 \to \varphi_2 \qquad \varphi_1}{\varphi_2}$$

  onde φ_1, φ_2 representam fórmulas arbitrárias em F'^X_Σ.

- G (generalização)

$$\frac{\varphi}{\forall x\, \varphi}$$

  onde φ representa uma fórmula arbitrária em F'^X_Σ e $x \in X$; φ é a premissa da regra e $\forall x\, \varphi$ é a conclusão da regra. ∎

Definição 3.7.2 DERIVAÇÃO EM $\mathcal{H}_c$
Semelhante à definição apresentada no caso de $\mathcal{H}_p$ tendo em conta que agora existe também a regra de inferência G. ∎

Exemplo 3.7.3 Sendo $\varphi \in F'^X_\Sigma$, um exemplo de derivação de $\forall x_2(\forall x_1\ \varphi)$ a partir de $\{\forall x_1(\forall x_2\ \varphi)\}$ é

1. $\forall x_1(\forall x_2\ \varphi)$ hipótese
2. $(\forall x_1(\forall x_2\ \varphi)) \to \forall x_2\ \varphi$ A5

3. $\forall x_2\, \varphi$ MP 1,2
4. $(\forall x_2\, \varphi) \to \varphi$ A5
5. φ MP 3,4
6. $\forall x_1\, \varphi$ G 5
7. $\forall x_2 (\forall x_1\, \varphi)$ G 6

■

Definição 3.7.4 CONSEQUÊNCIA EM $\mathcal{H}_c$ E TEOREMA DE $\mathcal{H}_c$
Noções semelhantes às apresentadas para $\mathcal{H}_p$. Sendo $\Phi \subseteq F'^X_\Sigma$ e $\varphi \in F'^X_\Sigma$, a notação agora utilizada é, naturalmente, $\Phi \vdash_{\mathcal{H}_c} \varphi$ e $\vdash_{\mathcal{H}_c} \varphi$. ■

Exemplo 3.7.5 Tendo em conta o Exemplo 3.7.3 tem-se que $\forall x_2 (\forall x_1\ \varphi)$ é consequência de $\{\forall x_1 (\forall x_2\, \varphi)\}$ em $\mathcal{H}_c$. ■

Numa derivação diz-se que uma fórmula depende de φ se a fórmula aparece na derivação através da aplicação de uma regra de inferência em cujas premissas se encontra φ ou outra fórmula que por sua vez também dependa de φ.

Proposição 3.7.6 METATEOREMA DA DEDUÇÃO
Sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi \in F'^X_\Sigma$, $n \in I\!N_0$, tais que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{H}_c} \varphi$. Se na derivação todas as aplicações da regra G a φ_n ou a uma fórmula que dependa de φ_n são tais que a variável que fica quantificada pela aplicação de G não pertence $VL(\varphi_n)$ então $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash_{\mathcal{H}_c} \varphi_n \to \varphi$. ■

3.7.2 Correcção e completude de $\mathcal{H}_c$

O resultado de correcção (fraca) do sistema $\mathcal{H}_c$ estabelece que todo o teorema de $\mathcal{H}_c$ é uma fórmula válida (Proposição 3.7.8). A correcção de $\mathcal{H}_c$ resulta do facto de (i) os axiomas de $\mathcal{H}_c$ serem fórmulas válidas e de (ii) as regras de inferência de $\mathcal{H}_c$ preservarem a validade das fórmulas, ou seja, se as premissas são fórmulas válidas então a conclusão é também fórmula válida (Proposição 3.7.7).

Proposição 3.7.7 CORRECÇÃO DOS AXIOMAS E REG. DE INFERÊNCIA DE $\mathcal{H}_c$

1. Os axiomas de $\mathcal{H}_c$ são fórmulas válidas.
2. Se $\models \varphi_1$ e $\models \varphi_1 \to \varphi_2$ então $\models \varphi_2$, para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in F'^X_\Sigma$.
3. Se $\models \varphi$ então $\models \forall x\, \varphi$, para quaisquer $\varphi \in F'^X_\Sigma$ e $x \in X$. ■

Proposição 3.7.8 CORRECÇÃO FRACA DO SISTEMA DEDUTIVO $\mathcal{H}_c$
O sistema dedutivo $\mathcal{H}_c$ é fracamente correcto, ou seja, para cada $\varphi \in F'^X_\Sigma$,

$$\text{se } \vdash_{\mathcal{H}_c} \varphi \text{ então } \models \varphi. \qquad ■$$

Observação 3.7.9 O sistema $\mathcal{H}_c$ *não* verifica a propriedade de correcção (isto é, se $\Phi \vdash_{\mathcal{H}_c} \varphi$ então $\Phi \models \varphi$, com $\Phi \subseteq F'^X_\Sigma$ e $\varphi \in F'^X_\Sigma$) quando se considera a noção de consequência semântica que se tem vindo a utilizar até aqui (ver Definição 3.3.18). Basta considerar, por exemplo, a seguinte situação: tem-se que $P(x) \vdash_{\mathcal{H}_c} \forall x P(x)$ mas facilmente se conclui que $P(x) \not\models \forall x P(x)$ (considere-se uma estrutura de interpretação cujo domínio é $\mathbb{N}_0$ e interprete-se P como o predicado "ser par"). O problema advém exclusivamente da regra de inferência G, pois, em geral, $\mathbb{M}, \rho \Vdash \varphi$ não implica $\mathbb{M}, \rho \Vdash \forall x \varphi$.

No entanto, se se utilizar a definição de consequência semântica (global) referida na Observação 3.3.19 o sistema $\mathcal{H}_c$ já seria correcto. Com efeito, neste caso, a regra de inferência G deixa de constituir um problema, pois se $\mathbb{M} \Vdash \varphi$ então $\mathbb{M} \Vdash \forall x \varphi$, para cada $\varphi \in F'^X_\Sigma$ e estrutura de interpretação $\mathbb{M}$. Naturalmente, a regra MP verifica também esta propriedade.

Refira-se ainda que podem ser também encontrados na literatura sistema dedutivos de tipo Hilbert que são correctos face à noção de consequência semântica da Definição 3.3.18. O leitor interessado poderá consultar [4] ou [2]. Nestes casos, a regra G não está presente, mas os axiomas são os acima referidos e $\forall x_1(\forall x_2(\ldots(\forall x_n \varphi)\ldots))$ onde φ é um qualquer dos axiomas anteriores e $x_1, x_2, \ldots x_n \in X$, $n \geq 1$. O conjunto dos teoremas destes sistemas é igual ao conjunto dos teoremas de $\mathcal{H}_c$. ■

A prova da propriedade de completude do sistema dedutivo $\mathcal{H}_c$ é bastante mais elaborada do que a prova da correcção e não irá ser aqui detalhada. A prova pode ser adaptada da apresentada, por exemplo, em [4] ou [2].

Proposição 3.7.10 COMPLETUDE DO SISTEMA $\mathcal{H}_c$
O sistema dedutivo $\mathcal{H}_c$ é completo: dados $\Phi \subseteq F'^X_\Sigma$ e $\varphi \in F'^X_\Sigma$,

$$\text{se } \Phi \models \varphi \text{ então } \Phi \vdash_{\mathcal{H}_c} \varphi. \qquad \blacksquare$$

Observação 3.7.11 Como facilmente se pode concluir, a completude é também verificada quando se considera a consequência semântica global. ∎

Exercícios

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos.

Exercício 3.7.12 Na sequência ψ_1, ψ_2 designam fórmulas arbitrárias de F'^X_Σ e P, Q são predicados unários. Mostre que:

1. $\{\forall x(P(x) \to (\neg Q(x))), P(a)\} \vdash_{\mathcal{H}_c} \neg Q(a)$
2. $\vdash_{\mathcal{H}_c} (\forall x(\psi_1 \to \psi_2)) \to ((\forall x\, \psi_1) \to (\forall x\, \psi_2))$
3. $\vdash_{\mathcal{H}_c} \psi_1 \to (\forall x\, \psi_1)$
   se $x \notin VL(\psi)$
4. $\{\psi_1 \to (\forall x\, \psi_2)\} \vdash_{\mathcal{H}_c} \forall x(\psi_1 \to \psi_2)$
   se $x \notin VL(\psi_1)$
5. $\{(\forall x\, \psi_1) \to \psi_2\} \vdash_{\mathcal{H}_c} \neg(\forall x(\neg(\psi_1 \to \psi_2)))$
   se $x \notin VL(\psi_2)$ ∎

Exercício 3.7.13 Apresente uma prova para a Proposição 3.7.6. Sugestão: A prova é semelhante à sugerida no caso $\mathcal{H}_p$. O axioma A2 é relevante na prova do passo de indução relativo à regra G. ∎

Exercício 3.7.14 Apresente uma prova para a Proposição 3.7.7. ∎

Exercício 3.7.15 Apresente uma prova para a Proposição 3.7.8. ∎

Bibliografia

[1] M. D Agostino, D. Gabbay, R. Hahnle, and J. Possega (eds). *Handbook of tableau methods.* Kluwer Academic Publishers, 1999.

[2] J. Bell and M. Machover. *A Course in Mathematical Logic.* North-Holland, 1977.

[3] M. Ben-Ari. *Mathematical Logic for Computer Science.* Prentice Hall, 1993.

[4] H. Enderton. *A mathematical introduction to logic.* Academic Press, 1972.

[5] R. Epstein and W. Carnielli. *Computability: computable functions, logic and the foundations of mathematics.* Wadsworth, 2000. 2a edição.

[6] M. Fitting. *Proof methods for modal and intutionistic logics.* Reidel, 1983.

[7] M. Fitting. *First-order logic and automated theorem proving.* Springer Verlag, 1990.

[8] J. Gallier. *Logic for computer science.* John Wiley & Sons, 1987.

[9] A. Hamilton. *Logic for mathematicians.* Cambridge University Press, 1978.

[10] E. Mendelson. *Introduction to mathematical logic.* D. Van Nostrand Company, 1979.

[11] D. Prawitz. *A Course in Mathematical Logic.* Almqvist & Wiksell, 1965.

[12] A. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic proof theory.* Cambridge University Press, 1996.

[13] D. van Dalen. *Logic and structure*. Springer-Verlag, 1994.