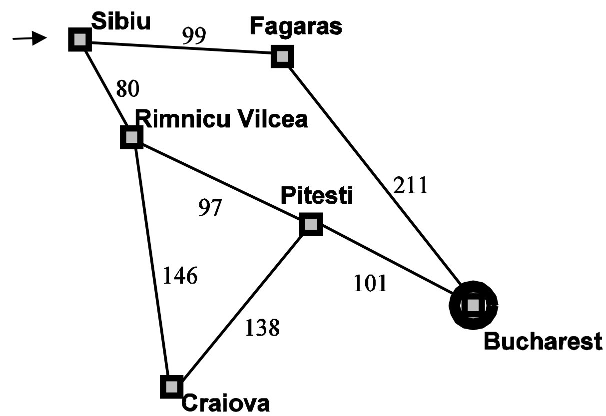
GRUPO I

I.1) Considere que se pretende descobrir o caminho mais curto para ir por estrada de Sibiu a Bucareste. A figura seguinte representa um excerto do mapa da Roménia, com algumas das principais cidades e respectivas ligações por estrada. A cada ligação entre duas cidades está associado um número que representa os quilómetros a percorrer para se ir de uma cidade à outra por essa ligação.



Resolva o problema usando o algoritmo de procura de custo uniforme. Especifique a ordem de expansão dos nós efectuada pelo algoritmo, indique a solução encontrada e o seu custo. Para se referir a cada uma das cidades use a respectiva inicial.

Resposta:
Partindo do estado inicial S, os conteúdos das listas aberta e fechada em cada iteração do algoritmo de procura de custo uniforme até atingir uma solução são:

Lista Aberta:	S(0)	R(80), F(99)	F(99), S(160), P(177), C(226)
Lista Fechada:		S	S, R

~~S(160)~~, P(177) , S(198) , C(226), B(310)	~~S(198)~~ , C(226), R(274) B(278), B(310), C(315)
S, R, F	S, R, F, P

~~R(274)~~, B(278), B(310), C(315), P(364), R(372)	B(278), B(310), C(315), P(364), R(372)
S, R, F, P, C	S, R, F, P, C

Sendo assim, a ordem de expansão dos nós seria S, R, F, P, C até atingir o estado objectivo B.

A solução encontrada seria S-R-P-B com custo 278.

I.2) Demonstre usando o algoritmo de Davis-Putnam que $c \wedge d$ é consequência lógica do seguinte conjunto de fórmulas proposicionais:

$a \vee (b \wedge c)$
$\neg e$
$(a \vee b) \rightarrow (d \vee e)$
$\neg a$

Resposta:
Vamos juntar a negação da conclusão e tentar provar pelo algoritmo de Davis-Putnam que o conjunto de cláusulas obtido é insatisfazível.

Negação da conclusão: Forma clausal:

$$\neg(c \wedge d) \longrightarrow \neg c \vee \neg d$$

Conjunto de fórmulas proposicionais:

$$\begin{array}{l} a \vee (b \wedge c) \\ \neg e \\ (a \vee b) \rightarrow (d \vee e) \\ \neg a \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a \vee b \\ a \vee c \\ \neg e \\ \neg a \vee d \vee e \\ \neg b \vee d \vee e \\ \neg a \end{array}$$

Algoritmo de Davis-Putnam:

$$\boxed{\begin{array}{l} a \vee b \\ a \vee c \\ \neg e \\ \neg a \vee d \vee e \\ \neg b \vee d \vee e \\ \neg a \\ \neg c \vee \neg d \end{array}} \xrightarrow[\neg a, \neg e]{\text{unitários:}} \boxed{\begin{array}{l} b \\ c \\ \neg b \vee d \\ \neg c \vee \neg d \end{array}} \xrightarrow[b,c]{\text{unitários:}} \boxed{\begin{array}{l} d \\ \neg d \end{array}}$$

✘

Como o conjunto de cláusulas é insatisfazível, $c \wedge d$ é consequência lógica do conjunto original de fórmulas proposicionais.

I.3) Considere o programa em lógica normal listado abaixo. Indique todos os seus modelos estáveis. Justifique.

```
a.
c :- a, not b.
d :- a, not c, not d.
```

Resposta:
`a` tem que ser verdadeiro porque é um facto, portanto irá aparecer sempre no `least(P/I)`.
Devido à última regra, `a ∧ not c` tem que ser falso em todos os modelos estáveis. Como `a` é verdadeiro, então `c` também tem que ser verdadeiro.
Para que `c` seja verdadeiro no `least(P/I)`, é necessário que seja verdadeiro o corpo da 2ª regra (única com `c` na cabeça). Para isso, `not b` tem que ser verdadeiro, ou seja `b` falso.

Logo, o único modelo estável é `I = {a,c}`

O programa dividido `P/I` é:

```
a.
c :- a.
```

Cujo modelo mínimo é:

```
least(P/I) = {a,c}
```

Portanto `I = least(P/I)` logo `I` é um modelo estável.

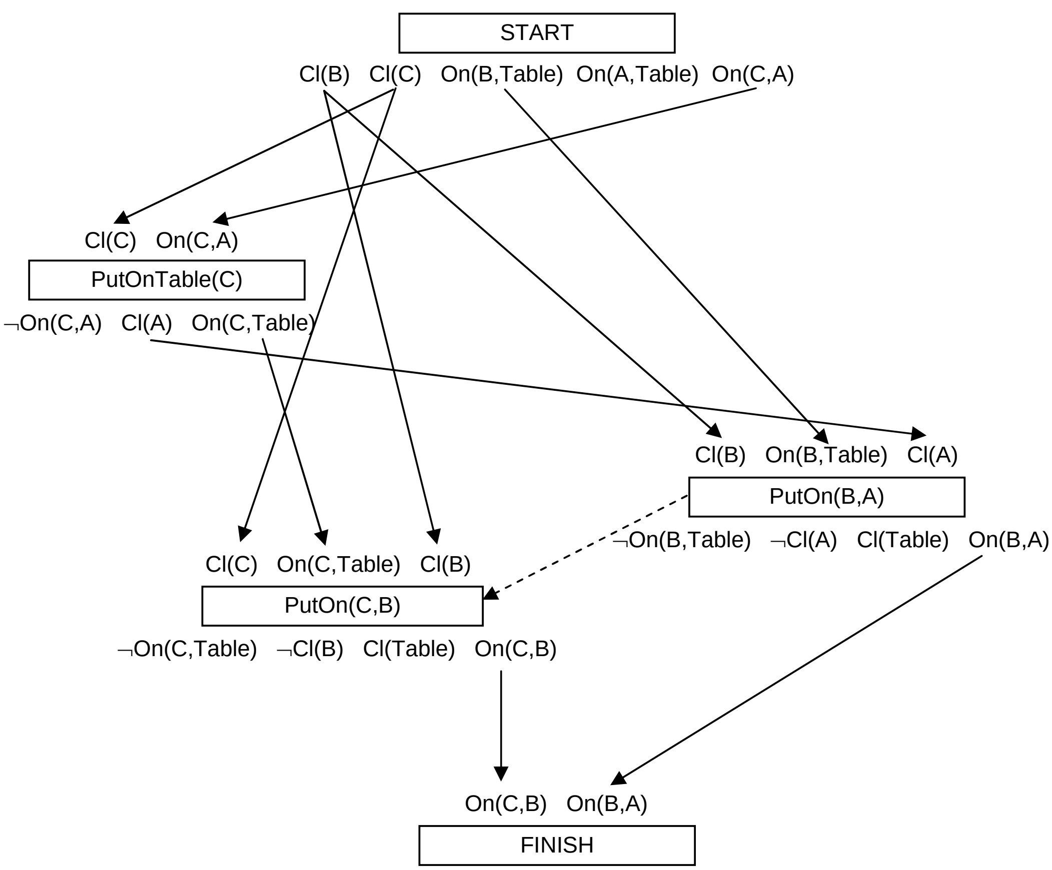
I.4) A figura seguinte representa um problema de planeamento no mundo de blocos em que, partindo da situação inicial, se pretende encontrar um sequência de acções para se chegar à situação objectivo.

Situação Inicial   Situação Objectivo

Considere que as únicas acções possíveis são colocar um bloco na mesa (desde que o bloco não tenha outro bloco por cima) e colocar um bloco em cima de outro bloco (desde que ambos os blocos não tenham outros blocos por cima). Estas acções são representadas na linguagem STRIPS da seguinte forma:

Apresente um plano POP tal que a partir da situação inicial se possa atingir a situação objectivo.

Resposta:



I.5) 1% das mulheres com quarenta anos que efectuam regularmente rastreio têm cancro da mama. Cerca de 80% dessas mulheres obterão uma mamografia positiva. 9.6% das mulheres sem cancro da mama também têm mamografia positiva. Uma mulher neste grupo etário teve uma mamografia positiva no rastreio regular. Qual é a probabilidade de ela ter cancro da mama? Justifique a sua resposta.

Resposta:

Variáveis, seus domínios e respectivo significado:

Variável	Domínio	Significado
C	c	tem cancro
	¬c	não tem cancro
P	p	mamografia positiva
	¬p	mamografia negativa

Informação disponível:

"1% das mulheres com quarenta anos que efectuam regularmente rastreio têm cancro da mama" → P(c) = 0.01
"Cerca de 80% dessas mulheres obterão uma mamografia positiva" → P(p|c) = 0.8
"9.6% das mulheres sem cancro da mama também têm mamografia positiva" → P(p|¬c) = 0.096
"Uma mulher neste grupo etário teve uma mamografia positiva no rastreio regular. Qual é a probabilidade de ela ter cancro da mama?" → P(c|p) = ?

$$P(c|p)=\frac{P(c,p)}{P(p)}=\frac{P(p|c)P(c)}{P(p,c)+P(p,\neg c)}=\frac{P(p|c)P(c)}{P(p|c)P(c)+P(p|\neg c)P(\neg c)}=\frac{0.8\times 0.01}{0.8\times 0.01+0.096\times(1-0.01)}\approx 0.078$$

GRUPO II

Pretende-se usar um algoritmo genético para resolver problemas de satisfatibilidade booleana. Em particular, dado um conjunto de *m* cláusulas proposicionais pretende-se encontrar uma atribuição de valores lógicos às suas *n* variáveis proposicionais que torne todas as cláusulas verdadeiras.

II.1) Explique como representaria cada individuo da população.

Resposta:
Cada individuo seria representado por uma sequência de *n* valores binários, correspondendo ao valores das variáveis proposicionais do problema.

cromossoma:

v_1	v_2	v_3	…	v_{n-2}	v_{n-1}	v_n

$$\forall_{1\le i\le n} v_i \in \{0,1\}$$

II.2) Defina uma função de mérito apropriada ao problema.

Resposta:
Assumindo que o objectivo é minimizar o seu valor, uma função de mérito apropriada ao problema seria o número de cláusulas que ficariam falsas com a atribuição de valores representada pelo indivíduo.

II.3) Defina um operador de recombinação apropriado ao problema.

Resposta:
Um operador de recombinação apropriado ao problema seria a recombinação uniforme, utilizando uma máscara gerada aleatoriamente para misturar os valores das variáveis de ambos os progenitores, ficando os seus filhos com valores de algumas variáveis de um progenitor e os valores das restantes variáveis do outro progenitor.

II.4) Defina um operador de mutação apropriado ao problema.

Resposta:
Um operador de mutação apropriado ao problema seria a escolha aleatória de uma variável e a mudança do seu valor para o seu complementar.

II.5) Sugira um algoritmo trepa-colinas para integrar no algoritmo genético com o objectivo de melhorar a qualidade de um indivíduo.

Resposta:
Um algoritmo trepa-colinas apropriado ao problema poderia ter uma vizinhança definida pelo complemento do valor de cada uma das variáveis do individuo. Dos *n* indivíduos da vizinhança escolher-se-ia o que tivesse menor valor da função de mérito repetindo-se o processo até se atingir um mínimo local (ou global, quando o valor da função de mérito for 0).

GRUPO III

Sejam x, y e z variáveis inteiras positivas com valores entre 1 e 9, sujeitas às seguintes três restrições:

$$x = y - 1$$

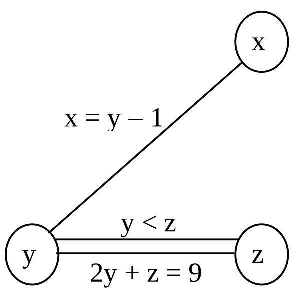
$$y < z$$

$$2y + z = 9$$

III.1) Construa o grafo de restrições para este problema de satisfação de restrições, indicando o significado dos nós e das arestas.

Resposta:

O problema de satisfação de restrições é representado pelo seguinte grafo de restrições em que os nós representam as variáveis e os arcos as restrições:



III.2) Considere apenas a última das restrições (2y + z = 9). De acordo com os domínios iniciais especificados para as variáveis, indique quais os valores de y que se encontram inconsistentes. Justifique a sua resposta.

Resposta:

Domínios iniciais: $y \in D_y = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $z \in D_z = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Para que um valor de $y \in D_y$ seja consistente com a restrição $2y + z = 9$ é necessário que exista um valor de $z \in D_z$ que o suporte, isto é, $z = 9 - 2y$.

Vamos então verificar para todos os valores possíveis de $y \in D_y$:
$y = 1 \rightarrow z = 9 - 2\times1 = 7 \in D_z$ (consistente)
$y = 2 \rightarrow z = 9 - 2\times2 = 5 \in D_z$ (consistente)
$y = 3 \rightarrow z = 9 - 2\times3 = 3 \in D_z$ (consistente)
$y = 4 \rightarrow z = 9 - 2\times4 = 1 \in D_z$ (consistente)
$y = 5 \rightarrow z = 9 - 2\times5 = -1 \notin D_z$ (inconsistente)
$y = 6 \rightarrow z = 9 - 2\times6 = -3 \notin D_z$ (inconsistente)
$y = 7 \rightarrow z = 9 - 2\times7 = -5 \notin D_z$ (inconsistente)
$y = 8 \rightarrow z = 9 - 2\times8 = -7 \notin D_z$ (inconsistente)
$y = 9 \rightarrow z = 9 - 2\times9 = -9 \notin D_z$ (inconsistente)

Logo, os valores de y que se encontram inconsistentes são: 5, 6, 7, 8 e 9.

III.3) Quais seriam os domínios que obteria para as variáveis x, y e z após a aplicação do algoritmo de propagação de restrições AC3 para a remoção dos valores inconsistentes com as restrições do problema.

Resposta:

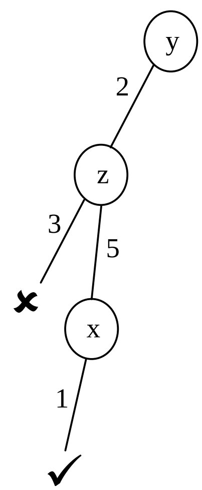
Pela resposta da pergunta anterior verificamos que devido à restrição 2y + z = 9 o domínio de y pode ser actualizado para: $D_y \leftarrow \{1,2,3,4\}$
Pela mesma razão, domínio de z pode ser actualizado para: $D_z \leftarrow \{1,3,5,7\}$
De acordo com a restrição y<z o valor z=1 não tem suporte em D_y logo: $D_z \leftarrow \{3,5,7\}$
E voltando à restrição 2y + z = 9 o domínio de y pode ser novamente actualizado para: $D_y \leftarrow \{1,2,3\}$
Agora de acordo com a restrição x = y – 1, o domínio de x pode ser actualizado para: $D_x \leftarrow \{1,2\}$
E de acordo com a mesma restrição o domínio de y pode ser reactualizado para: $D_y \leftarrow \{2,3\}$
E pela restrição 2y + z = 9 o domínio de z pode ser actualizado para: $D_z \leftarrow \{3,5\}$

Deste modo, o algoritmo de propagação de restrições AC3 não removeria mais elementos dos domínios, atingindo um ponto fixo com os domínios: $D_x = \{1,2\}$, $D_y = \{2,3\}$ e $D_z = \{3,5\}$.

III.4) Apresente esquematicamente a execução do algoritmo de procura com retrocesso para o problema de restrições começando com os domínios obtidos na alínea anterior (se não fez a alínea anterior ou não tem a certeza da sua correcção, considere os domínios iniciais). Use a heurística da variável mais constrangida e desempate pelo número de restrições (e em caso de persistência de empate, por ordem alfabética). Atribua os valores por ordem crescente.

Resposta:

Esquema da execução do algoritmo de procura com retrocesso começando com os domínios $D_x = \{1,2\}$, $D_y = \{2,3\}$ e $D_z = \{3,5\}$:



A solução obtida seria então: x = 1, y = 2 e z = 5.

GRUPO IV

Considere uma versão modificada do Mundo do Wumpus (apresentado nas aulas teóricas) onde:

- Cada uma das 16 casas do tabuleiro pode ser identificada por um par [*i*,*j*] em que *i* representa o número da coluna e *j* o número da linha, como é ilustrado na figura seguinte:

1,4	2,4	3,4	4,4
1,3	2,3	3,3	4,3
1,2	2,2	3,2	4,2
1,1	2,1	3,1	4,1

- A casa inicial [1,1] não tem poço. Cada uma das outras pode ou não conter um poço, que são dispostos aleatoriamente com uma probabilidade de 20%;
- Cada casa pode ser muito ventosa, pouco ventosa ou não ser ventosa.
- O vento numa casa é apenas causado pela existência um ou mais poços em casas adjacentes (na vertical ou horizontal) de acordo com as seguintes regras:

    se existirem 3 ou mais poços em casas adjacentes então é necessariamente muito ventosa;

    se existirem 2 poços em casas adjacentes então é de certeza ventosa, sendo equiprovável ser muito ou pouco ventosa;

    se existir apenas 1 poço em casas adjacentes então em 75% dos casos é pouco ventosa e nos restantes não é ventosa;

IV.1) Suponha que pretende modelar com uma rede Bayesiana apenas o conhecimento relativo à ocorrência de vento nas casas [1,2] e [2,1]. Use apenas as variáveis aleatórias $V_{1,2}$ e $V_{2,1}$ para representar o tipo de vento nessas casas e as variáveis $P_{1,3}$, $P_{2,2}$ e $P_{3,1}$ para representar a existência de poços nas respectivas casas. Apresente a topologia da rede, os domínios das variáveis aleatórias e as tabelas de probabilidade condicionada.

Resposta:

Variáveis aleatórias, seus domínios e respectivo significado:

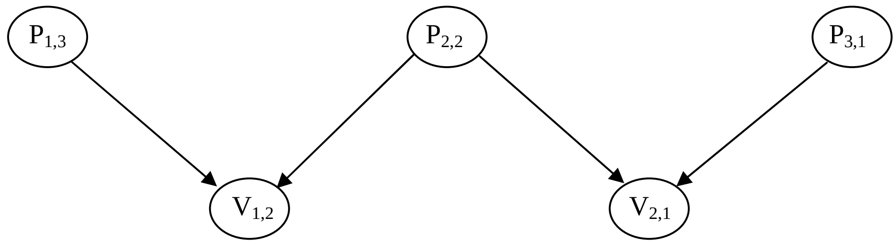
Variável	Domínio	Significado
$V_{i,j}$	mv	a casa [i,j] é muito ventosa
	pv	a casa [i,j] é pouco ventosa
	nv	a casa [i,j] não é ventosa
$P_{i,j}$	true	a casa [i,j] tem um poço
	false	a casa [i,j] não tem um poço

Topologia da rede e tabelas de probabilidade condicionada:

$P_{1,3}$	$P(P_{1,3})$
true	0.2
false	0.8

$P_{2,2}$	$P(P_{2,2})$
true	0.2
false	0.8

$P_{3,1}$	$P(P_{3,1})$
true	0.2
false	0.8



$P_{1,3}$	$P_{2,2}$	$P(V_{1,2}\|P_{1,3},P_{2,2})$		
		mv	pv	nv
true	true	0.5	0.5	0
true	false	0	0.75	0.25
false	true	0	0.75	0.25
false	false	0	0	1

$P_{2,2}$	$P_{3,1}$	$P(V_{2,1}\|P_{2,3},P_{3,1})$		
		mv	pv	nv
true	true	0.5	0.5	0
true	false	0	0.75	0.25
false	true	0	0.75	0.25
false	false	0	0	1

IV.2) Calcule a probabilidade de haver muito vento na casa [2,1] e pouco na casa [1,2].

Resposta:

$$P(V_{2,1}=mv,V_{1,2}=pv)=\sum_{P_{1,3}}\sum_{P_{2,2}}\sum_{P_{3,1}}P(P_{1,3},P_{2,2},P_{3,1},V_{2,1}=mv,V_{1,2}=pv)$$

$$=\sum_{P_{1,3}}\sum_{P_{2,2}}\sum_{P_{3,1}}P(P_{1,3})P(P_{2,2})P(P_{3,1})P(V_{2,1}=mv|P_{2,2},P_{3,1})P(V_{1,2}=pv|P_{1,3},P_{2,2})$$

$$=\sum_{P_{1,3}}P(P_{1,3})\sum_{P_{2,2}}P(P_{2,2})P(V_{1,2}=pv|P_{1,3},P_{2,2})\sum_{P_{3,1}}P(P_{3,1})P(V_{2,1}=mv|P_{2,2},P_{3,1})$$

Para que $P(V_{2,1}=mv|P_{2,2},P_{3,1})>0$ é necessário que $P_{2,2}$ e $P_{3,1}$ sejam ambos verdadeiros (1ª linha da respectiva tabela de probabilidade condicionada). Logo:

$$=\sum_{P_{1,3}}P(P_{1,3})P(P_{2,2}=true)P(V_{1,2}=pv|P_{1,3},P_{2,2}=true)P(P_{3,1}=true)P(V_{2,1}=mv|P_{2,2}=true,P_{3,1}=true)$$

$$=\sum_{P_{1,3}}P(P_{1,3})\times 0.2\times P(V_{1,2}=pv|P_{1,3},P_{2,2}=true)\times 0.2\times 0.5=0.02\sum_{P_{1,3}}P(P_{1,3})P(V_{1,2}=pv|P_{1,3},P_{2,2}=true)$$

$$=0.02\times\left(P(P_{1,3}=true)P(V_{1,2}=pv|P_{1,3}=true,P_{2,2}=true)+P(P_{1,3}=false)P(V_{1,2}=pv|P_{1,3}=false,P_{2,2}=true)\right)$$

$$=0.02\times(0.2\times 0.5+0.8\times 0.75)=0.02\times(0.1+0.6)=0.02\times 0.7=0.014$$

IV.3) Sabendo que há muito vento na casa [2,1] e pouco na casa [1,2] qual a probabilidade de existir um poço na casa [1,3].

Resposta:

$$P(P_{1,3}=true|V_{2,1}=mv,V_{1,2}=pv)=\frac{P(P_{1,3}=true,V_{2,1}=mv,V_{1,2}=pv)}{P(V_{2,1}=mv,V_{1,2}=pv)}$$

$$P(P_{1,3}=true,V_{2,1}=mv,V_{1,2}=pv)=\sum_{P_{2,2}}\sum_{P_{3,1}}P(P_{1,3}=true)P(P_{2,2})P(P_{3,1})P(V_{2,1}=mv|P_{2,2},P_{3,1})P(V_{1,2}=pv|P_{1,3}=true,P_{2,2})$$

$$=P(P_{1,3}=true)\sum_{P_{2,2}}P(P_{2,2})P(V_{1,2}=pv|P_{1,3}=true,P_{2,2})\sum_{P_{3,1}}P(P_{3,1})P(V_{2,1}=mv|P_{2,2},P_{3,1})$$

Tal como na alínea anterior, para que $P(V_{2,1}=mv|P_{2,2},P_{3,1})>0$ é necessário que $P_{2,2}$ e $P_{3,1}$ sejam ambos verdadeiros:

$$= P(P_{1,3} = true)P(P_{2,2} = true)P(V_{1,2} = pv|P_{1,3} = true, P_{2,2} = true)P(P_{3,1} = true)P(V_{2,1} = mv|P_{2,2} = true, P_{3,1} = true)$$

$$= 0.2 \times 0.2 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.5 = 0.002$$

Logo:

$$P(P_{1,3} = true|V_{2,1} = mv, V_{1,2} = pv) = \frac{P(P_{1,3} = true, V_{2,1} = mv, V_{1,2} = pv)}{P(V_{2,1} = mv, V_{1,2} = pv)} = \frac{0.002}{0.014} = \frac{1}{7} \approx 0.14$$

IV.4) Se tiver que se mover para uma das casas [1,3], [2,2] ou [3,1] (de modo a evitar cair num poço), qual escolheria se soubesse que há muito vento na casa [2,1] e pouco na casa [1,2].

Resposta:

Se há muito vento na casa [2,1] então têm que existir poços em pelo menos 2 casas adjacentes, e como a casa [1,1] não tem poço, ambas as casas [2,2] e [3,1] têm que ter um poço. Consequentemente, escolheria mover para a casa [1,3] uma vez que a probabilidade de esta casa não ter poço é cerca de 86%.