FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

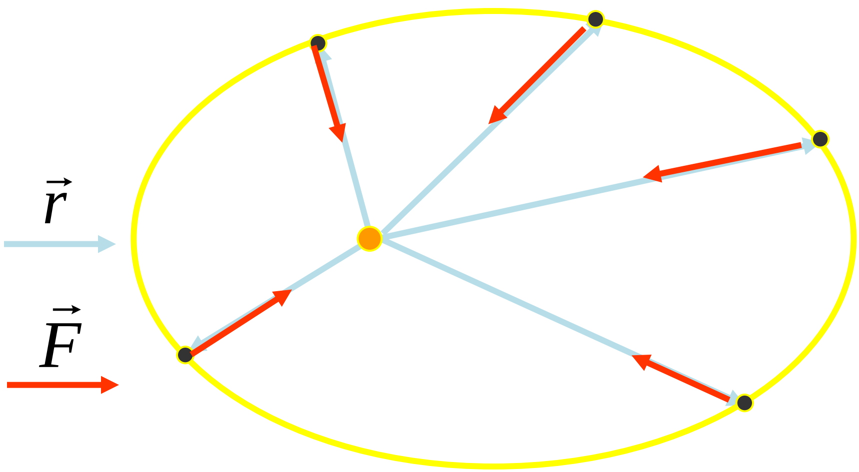
Aula 21

Gravitação Universal II

Sumário

- Planetas e Satélites: As Leis de Kèpler
- Satélites: Órbitas e Energia

Forças Centrais e Momento Angular



$$\vec{r} \parallel \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{C}^{te}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{L} \perp$ Plano instantâneo do movimento

$\vec{L} = \vec{C}^{te}$ → Movimento plano

↓

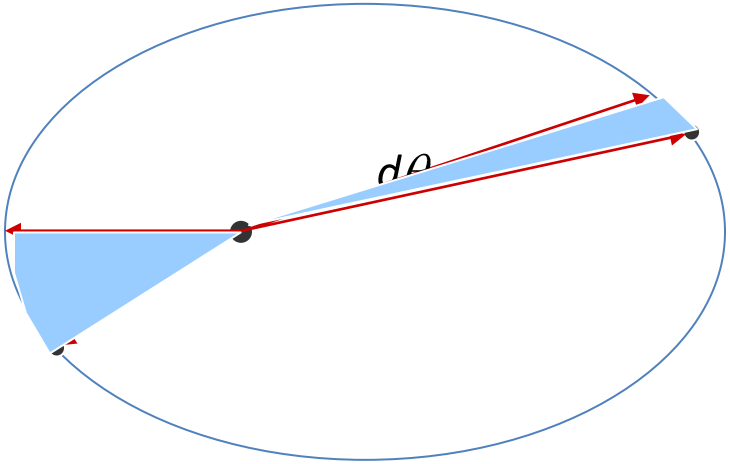
1ª Lei de Keppler para o movimento dos planetas

Forças Centrais e Momento Angular

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{C}^{te} \rightarrow L = C^{te} \rightarrow mr^2\omega = C^{te}$$

$$r r\frac{d\theta}{dt} = C^{te} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = C^{te}$$



A área varrida por unidade de tempo é constante.

2ª Lei de Keppler para o movimento dos planetas

Leis de Keppler

Supomos um corpo de massa *m* que se move com velocidade de módulo *v* em torno de um corpo maciço de massa *M*, com *M* >> *m*;

Supomos o corpo de massa *M* em repouso num referencial inercial;

A energia total é a soma das energias cinética e potencial do sistema $E = E_C + U$:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Leis de Keppler

1ª Lei de Keppler para o movimento planetério diz:

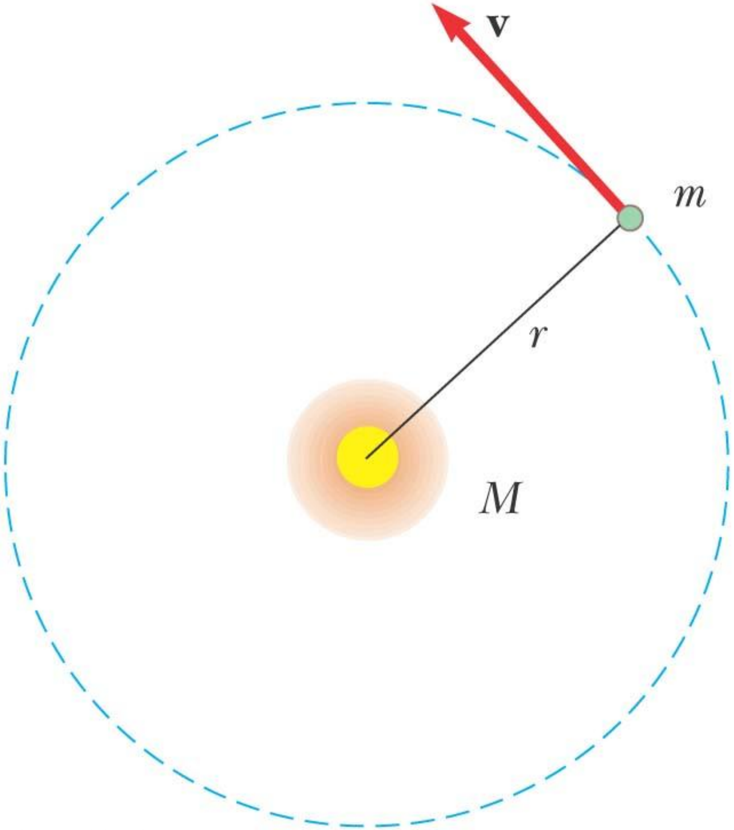
Os planetas movem-se em órbitas (planas) elípticas, em que o Sol ocupa um dos focos;

A maioria das órbitas no sistema solar são muito aproximada-mente circulares;

Façamos pois a aproximação de órbita circular.

Energia numa Órbita Circular

Um corpo de massa *m* move-se numa órbita circular em torno de outro corpo de massa *M*;



A força gravítica é a força centrípeta:

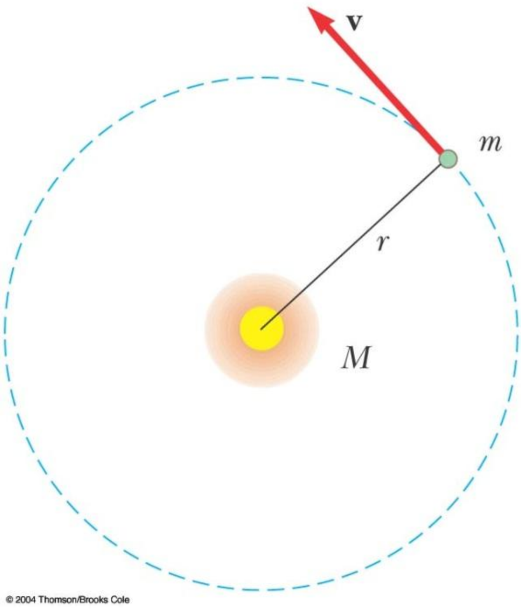
$$F_{\mathrm{g}} = \frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{2r}$$

$$E = E_{\mathrm{c}} + U = G\frac{mM}{2r} + \left(-G\frac{mM}{r}\right) \Leftrightarrow E = -G\frac{mM}{2r}$$

3ª Lei de Keppler

$$v^2 = G\frac{M}{r} \quad \Rightarrow \quad v = C^{te}$$



Movimento Circular Uniforme, com período *T*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

O quadrado do período do movimento dos planetas é directamente proporcional ao cubo do seu eixo maior (na aproximação circular, raio)

3ª Lei de Keppler para o movimento dos planetas

Sumário - Sistema de Duas Partículas Ligadas

A energia total e o momento angular total de um sistema ligado pela interacção gravítica são constantes do movimento.

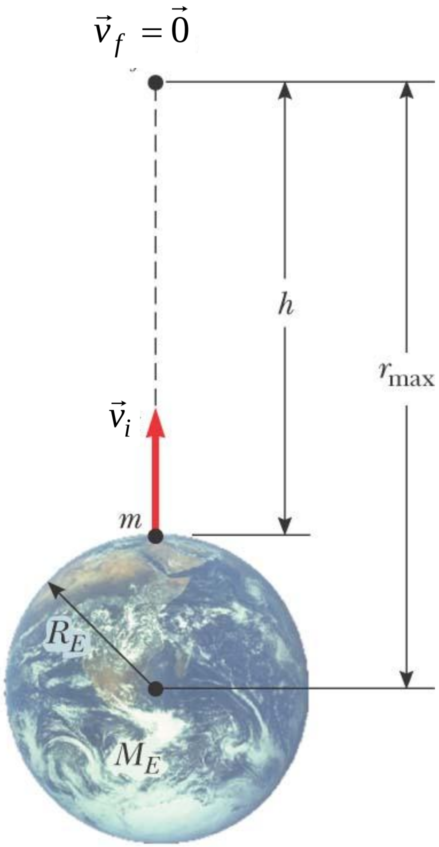
Podemos usar o princípio de conservação de energia para relacionar duas situações diferentes.

$$E = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GMm}{r_i} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{GMm}{r_f}$$

Velocidade de Escape

Um corpo de massa *m* é projectado para cima, a partir da superfície da Terra, com velocidade inicial de módulo v_i;

Utilizamos considerações de energia para calcular o valor mínimo do módulo da velocidade necessário para que o corpo possa escapar da Terra para o infinito



Velocidade de Escape

Este valor mínimo denomina-se ***velocidade de escape***

$$\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 - G\frac{mM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} = 0 - 0$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}}$$

v_{esc} é independente da massa do corpo

O resultado não depende da direcção da velocidade e estamos a desprezar a resistência do ar

Velocidade de Escape

O resultado é válido para qualquer planeta:

$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Valores da velocidade de escape das superfícies de vários planetas, Lua e Sol

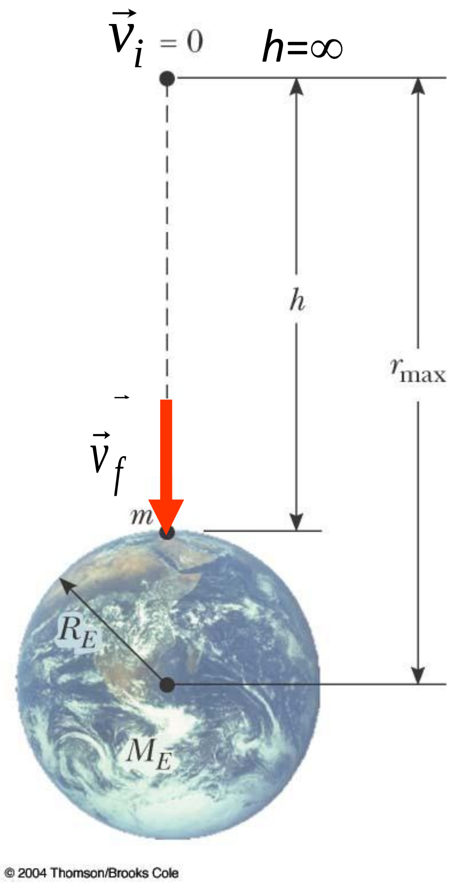
Planeta	*Velocidade de escape* (km/s)
Mercúrio	4.3
Vénus	10.3
Terra	11.2
Marte	5.0
Júpiter	60
Saturno	36
Urano	22
Neptuno	24
Plutão	1.1
Lua	2.3
Sol	618

Velocidade de Impacto

$$E_i = E_f$$

$$0 = -G\frac{Mm}{R_T} + \frac{1}{2}mv^2$$

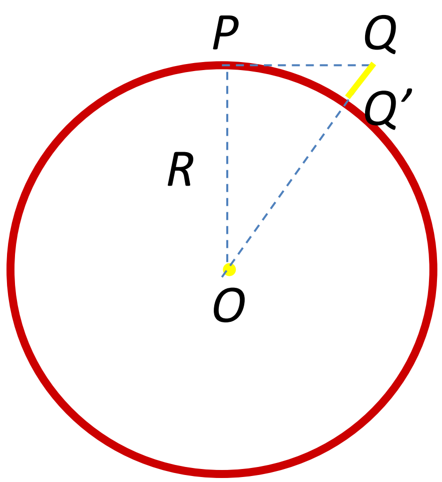
$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$



v é independente da massa *m* do objecto que cai, mas o momento linear e a energia cinética, que vão determinar o estrago, são proporcionais à massa.

Aceleração da Lua

Newton comparou as acelerações da Lua e de corpos junto à Terra;



Sendo *v* a velocidade da Lua, num segundo a Lua anda em metro o equivalente a *v* – distância PQ;

Na sua órbita circular a lua passa em Q';

Caiu, portanto em direcção à Terra a distância QQ'= OQ – R:

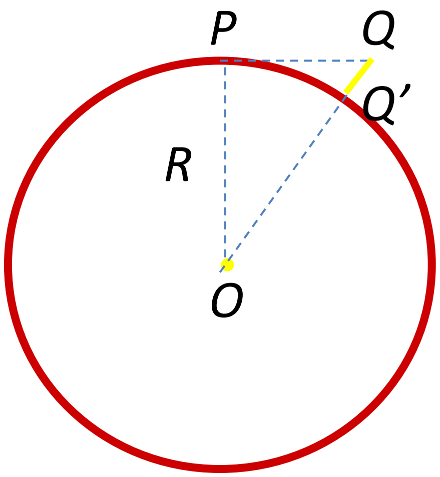
$$OQ = \sqrt{PQ^2 + (R)^2}$$

Aceleração da Lua

O perímetro da órbita da Lua é, aproximadamente:

$$P = 2\pi R = 2\pi \times 3.85\times10^{8}\ \text{m} = 2.42\times10^{9}\ \text{m}$$

O módulo da velocidade da Lua é



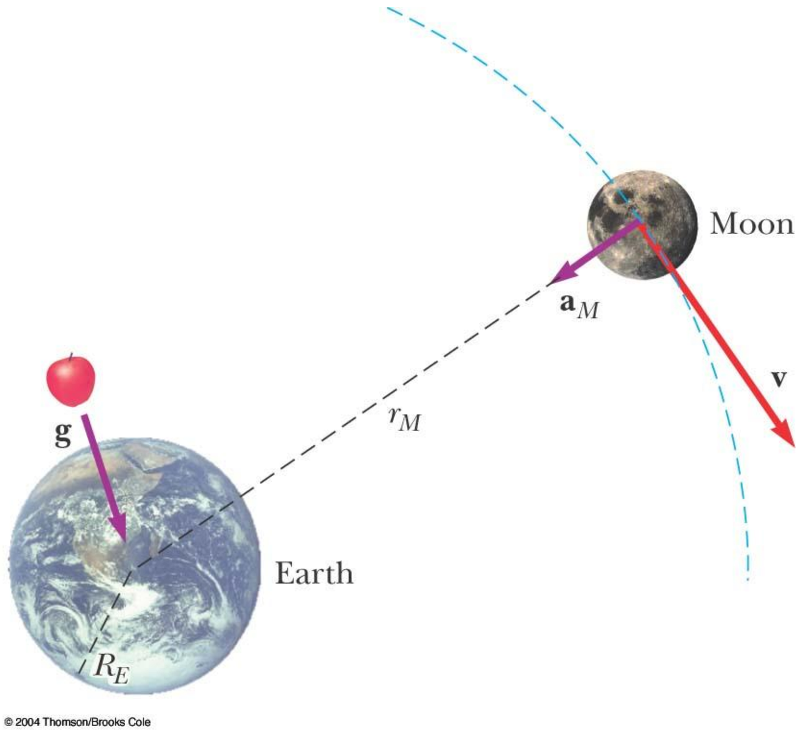
$$v = \frac{P}{T} = \frac{2.42\times10^{9}\ \text{m}}{29\ \text{dias}\times24\ \text{horas}\times3600\ \text{s}}$$
$$= 9.66\times10^{2}\ \text{m/s}$$

$$OQ = \sqrt{\left(9.66\times10^{2}\ \text{m}\right)^{2} + \left(3.85\times10^{8}\ \text{m}\right)^{2}}$$

$$QQ' = OQ - R = 1.1\times10^{-3}\ \text{m} = 0.0011\text{m}$$

Aceleração da Lua

Este resultado concorda bastante bem com a lei do inverso dos quadrados:



O raio da Terra é de cerca de 6400 km e se uma coisa que está a 6400 km do centro da Terra cai 4,9 m num segundo, uma coisa a 385000 km, ou seja a uma distância 60 vezes maior deve cair 1/3600 de 4,9 m o que é aproximadamente o resultado anterior.

Verificação de Newton

Newton comparou a aceleração da Lua na sua órbita com a aceleração de um corpo que cai perto da superfície da Terra;

Calculou a aceleração centrípeta da Lua a partir da distância desta e do período do movimento de translação;

Demonstrou assim a lei do inverso dos quadrados.