

Se P_0 é pt. máximo local, tem-se $f(P_0 + t\vec{u}) \leq f(P_0)$ para t suficientemente pequeno.

Teste da 2ª derivada

Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto crítico de f , em que f é diferenciável, ou seja $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$

ou seja: como $\nabla f(P_0) = \vec{0}$, isto vai acontecer se a 2ª derivada definida (segundo qq direccão) for negativa ou nula.

Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto crítico de f , em que f é diferenciável, ou seja $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$

$$\vec{f}'(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)u_2$$

$$\begin{aligned} \vec{f}''(x_0, y_0) &= D_{\vec{u}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P)u_1, \frac{\partial f}{\partial y}(P)u_2 \right) = D_{\vec{u}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) u_1 + D_{\vec{u}} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) u_2 = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} u_2 \right) u_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2 \right) u_2 = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)u_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)u_2^2 \end{aligned}$$

Dividindo os 3 termos deste polinómio por u_2^2 não lhe alteramos o sinal.

$$R = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)} + 2 \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)} \frac{u_1}{u_2} + 1$$

Pondo $\alpha = \frac{u_1}{u_2}$ é o mesmo sinal de $R\alpha^2 + 2T\alpha + S$

binómio discriminante deste trinómio de 2º grau é

$$4T^2 - 4RS$$

