Tópicos de resolução do terceiro teste de ALGA E - 2014/2015

Questão 6: Considere o endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e a matriz

$$A = \mathcal{M}\,(\,f;\ \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3},\ \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

onde $\text{b.c.}_{\mathbb{R}^3} = (\,(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\,)$.

(a) Calcule os valores próprios de f e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

(b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de f.

(c) Mostre que f é diagonalizável e indique uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual a matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$ é diagonal.

Resposta:

(a) Por definição, o polinómio característico do endomorfismo f é o polinómio característico da matriz A:

$$|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Como $A-\lambda I_3$ é uma matriz triangular então

$$|A-\lambda I_3| = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Assim se conclui que os valores próprios de A são: 1, 2 e 3. Atendendo a que

$$|A-\lambda I_3| = (-1)(\lambda-1)^1(\lambda-2)^1(\lambda-3)^1,$$

conclui-se que todos os valores próprios de A têm multiplicidade algébrica 1. Tendo presente que

$$A = \mathcal{M}\,(\,f;\ \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3},\ \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})\,,$$

de acordo com a matéria leccionada, podemos concluir que os valores próprios do endomorfismo f são: 1, 2, 3; todos com multiplicidade algébrica 1.

(b) Em primeiro lugar vamos obter uma base de M_1 (subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1). Consideremos o sistema de equações lineares (homogéneo) representado pela matriz

$$[A-1I_3 \mid 0\ ] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

O referido sistema de equações lineares é equivalente ao que é representado pela matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim se conclui que o sistema de equações em apreço é equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y+z = 0 \end{cases}.$$

Consequentemente

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Tendo em conta que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

conclui-se que

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma base de M_1. Atendendo a que $A = \mathcal{M}\,(\,f;\ \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3},\ \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$ conclui-se que

$$((0, -1, 1))$$

é uma base de E_1 (subespaço próprio de f associado ao valor próprio 1).
Para determinar uma base M_2 (subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2) temos de resolver o sistema de equações lineares (homogéneo) representado pela matriz

$$[A - 2I_3 \mid 0\ ] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema em causa é equivalente ao que é representado pela matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O referido sistema de equações é equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Portanto

$$M_2 = \left\{\begin{bmatrix} z \\ -z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Tendo presente que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sai que

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma base de M_2. Tendo em consideração que $A = \mathcal{M}\,(\,f;\ \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3},\ \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$, podemos concluir que

$$((1, -1, 1))$$

é uma base de E_2 (subespaço próprio de f associado ao valor próprio 2).
Para obter uma base de M_3 (subespaço próprio de A associado ao valor próprio 3) temos de resolver o sistema de equações lineares (homogéneo) representado pela matriz

$$[A - 3I_3 \mid 0\ ] = \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O referido sistema de equações lineares é equivalente ao que é representado pela matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim se conclui que o sistema de equações em apreço é equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. .$$

Consequentemente

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Tendo em conta que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

conclui-se que

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

é uma base de M_3. Como $A = \mathcal{M}\left(f;\ \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3},\ \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3} \right)$, então conclui-se que

$$((0,0,1))$$

é uma base E_3 (subespaço próprio de f associado ao valor próprio 3).

(c) Na resolução da alínea anterior foi estabelecido que: $((0,-1,1))$ é uma base de E_1, $((1,-1,1))$ é uma base de E_2 e $((0,0,1))$ é uma base E_3. Consequentemente, de acordo com a matéria leccionada, temos que

$$((0,-1,1)\,,(1,-1,1)\,,(0,0,1))$$

é uma sequência linearmente independente no espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ então

$$((0,-1,1)\,,(1,-1,1)\,,(0,0,1))$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$. Seja $\mathcal{B} = ((0,-1,1)\,,(1,-1,1)\,,(0,0,1))$. Do exposto resulta que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, constituída por vectores próprios de f. Tendo presente que: $f(0,-1,1) = (0,-1,1)$, $f(1,-1,1) = 2(1,-1,1)$, $f(0,0,1) = 3(0,0,1)$, conclui-se que

$$\mathcal{M}\left(f;\ \mathcal{B},\ \mathcal{B} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Questão 7: Considere os pontos: $A = (2,2,1)$, $B = (3,2,1)$ e $C = (2,4,4)$.

(a) Determine $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

(b) Usando o resultado obtido na alínea anterior, calcule a área do triângulo cujos vértices são os pontos: A, B e C.

(c) Obtenha uma equação vectorial do plano $\mathcal{P}$ que passa pelos pontos A, B e C.

Resposta:

(a) Consideremos os vectores: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Sabemos que a base (e_1, e_2, e_3) (base canónica de $\mathbb{R}^3$) é ortonormada e directa.
Nesta conformidade,

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,0) = e_1,$$

$$\overrightarrow{AC} = (0,2,3) = 2e_2 + 3e_3.$$

Consequentemente,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\text{mnemónica} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} e_3 = -3e_2 + 2e_3 = (0,-3,2).$$

(b) Como a sequência $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ é linearmente independente então os pontos A, B, C definem um paralelogramo cuja área é

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|-3e_2 + 2e_3\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

A área do triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C é dada por

$$\frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

(c) Uma equação vectorial do plano $\mathcal{P}$ que passa pelos pontos A, B e C é da forma

$$(x, y, z) = A + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}, \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Assim se conclui que

$$(x, y, z) = (2, 2, 1) + \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 2, 3), \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

é uma equação vectorial do plano $\mathcal{P}$ que passa pelos pontos A, B e C.

Questão 8: Mostre que: se u e v são dois vectores perpendiculares de $\mathbb{R}^3$ então

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Resposta:

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ tais que u e v são perpendiculares. Sabemos que

$$\|u + v\|^2 = (u + v)|(u + v) = u|(u + v) + v|(u + v) = u|u + u|v + v|u + v|v.$$

Como $u|v = v|u$ então temos

$$\|u + v\|^2 = u|u + 2u|v + v|v.$$

Tendo presente que, por hipótese, u e v são perpendiculares então $u|v = 0$ e por conseguinte

$$\|u + v\|^2 = u|u + 2u|v + v|v = u|u + v|v = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$