Uma resolução do exame de recurso de ALGA - 2014/2015

Questão 7 Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}_1 = ((1,0,1),(0,1,1),(1,0,2))$, $\mathcal{B}_2 = ((1,0,0),(0,1,1),(0,0,1))$.
Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o endomorfismo tal que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $f(1,1,0)$ e conclua que o vector $(1,1,0)$ é vector próprio de f.
(b) Calcule os valores próprios de f indicando as respectivas multiplicidades geométricas e averigúe se f é diagonalizável.
(c) Determine $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$, utilizando matrizes de mudança de base.
(d) Determine $f(x,y,z)$.
(e) Obtenha uma base de $\operatorname{Nuc} f$.

Resposta:

(a) Consideremos os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Denotemos por $\mathcal{E}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Assim, temos $\mathcal{E} = (e_1,e_2,e_3)$.
No que se segue denotamos por A a matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2)$. Assim, temos

$$A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja (a_1,a_2,a_3) a sequência das coordenadas do vector $(1,1,0)$ na base $\mathcal{B}_2$. Seja (b_1,b_2,b_3) a sequência das coordenadas do vector $f(1,1,0)$ na base $\mathcal{B}_2$. De acordo com a matéria leccionada, temos que

$$A\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E},\mathcal{B}_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Neste contexto, é claro que

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Designemos por P a matriz $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{E})$. Nesta conformidade,

$$P = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, sabemos que $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E},\mathcal{B}_2) = P^{-1}$. Determinemos a inversa de P

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Consequentemente

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E},\mathcal{B}_2) = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A sequência das coordenadas (a_1, a_2, a_3), do vector $(1, 1, 0)$ na base $\mathcal{B}_2$, pode ser obtida do modo seguinte

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A sequência das coordenadas (b_1, b_2, b_3), do vector $f(1, 1, 0)$ na base $\mathcal{B}_2$, pode ser determinada do modo seguinte

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Em suma, temos

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Como $(1, 1, -1)$ é a sequência das coordenadas do vector $(1, 1, 0)$ na base $\mathcal{B}_2$ e $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$ então

$$f(1, 1, 0) = (1, 1, 0) = 1(1, 1, 0).$$

Donde resulta, por definição de vector próprio e de valor próprio, que $(1, 1, 0)$ é um vector próprio de f, associado ao valor próprio 1.

(b) Por definição, o polinómio característico do endomorfismo f é o polinómio característico da matriz A:

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2.$$

Assim se conclui que os valores próprios de f são: 0 e 1. O valor próprio 0 tem multiplicidade algébrica 1 e o valor próprio 1 tem multiplicidade algébrica 2.
Em primeiro lugar vamos obter uma base de M_0 (subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0). Consideremos o sistema de equações lineares (homogéneo) representado pela matriz

$$[A - 0I_3 \mid 0\ ] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

O referido sistema de equações lineares é equivalente ao que é representado pela matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim se conclui que o sistema de equações em apreço é equivalente a

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Consequentemente

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Tendo em conta que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

conclui-se que

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma base de M_0. Logo $\dim M_0 = 1$. Portanto o valor próprio 0 tem multiplicidade geométrica 1.

Para determinar uma base de M_1 (subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1) temos de resolver o sistema de equações lineares (homogéneo) representado pela matriz

$$[A - 1I_3 \mid 0\ ] = \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema em causa é equivalente à equação

$$-x + y = 0.$$

Portanto

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ z \end{bmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Atendendo a que, para quaisquer $x, z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} x \\ x \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

então podemos concluir que

$$M_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Por outro lado, também é claro que, para quaisquer $x, z \in \mathbb{R}$,

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow x = 0 \wedge z = 0.$$

Então, pelo critério de independência linear, conclui-se que a sequência

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

é linearmente independente. Assim se conclui que

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

é uma base de M_1. Logo $\dim M_1 = 2$. Consequentemente, o valor próprio 1 tem multiplicidade geométrica 2.

De acordo com a matéria leccionada,

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

é uma sequência linearmente independente. Como $\dim \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) = 3$ então

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

é uma base de $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Assim se conclui que

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma base de $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, constituída por vectores próprios de A. Portanto A é uma matriz diagonalizável. Como $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2)$ então f é um endomorfismo diagonalizável.

(c) Seja

$$T = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_1,\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E},\mathcal{B}_1) = T^{-1}$. Determinemos a inversa de T

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-1)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+(-1)l_3]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Consequentemente

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E},\mathcal{B}_1) = T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $S = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$. De acordo com a matéria leccionada,

$$S = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E},\mathcal{B}_1)\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{E}).$$

Portanto

$$S = T^{-1}P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $C = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$. Sabemos que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\circ f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2) = SA.$$

Portanto

$$C = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = SA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Como

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E},\mathcal{B}_2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -y+z \end{bmatrix},$$

então $(x,y,-y+z)$ é a sequência das coordenadas de (x,y,z) na base $\mathcal{B}_2$.
Tendo presente que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)\begin{bmatrix} x \\ y \\ -y+z \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} x \\ y \\ -y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ -y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+4y-z \\ y \\ x-3y+z \end{bmatrix},$$

conclui-se que $(-x+4y-z, y, x-3y+z)$ é a sequência das coordenadas de $f(x,y,z)$ na base $\mathcal{B}_1$. Como

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_1,\mathcal{E})\begin{bmatrix} -x+4y-z \\ y \\ x-3y+z \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} -x+4y-z \\ y \\ x-3y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x+4y-z \\ y \\ x-3y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \\ x-y+z \end{bmatrix},$$

então $(y, y, x-y+z)$ é a sequência das coordenadas de $f(x,y,z)$ na base $\mathcal{E}$. Atendendo a que $\mathcal{E}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$, conclui-se que

$$f(x,y,z) = (y, y, x-y+z).$$

(e) Usando a alínea anterior, temos que

$$\mathrm{Nuc}\, f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon y=0 \wedge x-y+z=0\} = \{(x,0,-x)\colon x\in\mathbb{R}\} = \langle(1,0,-1)\rangle$$

Como $(1,0,-1)\neq(0,0,0)$ então a sequência $((1,0,-1))$ é linearmente independente. Do exposto resulta que $((1,0,-1))$ é uma base de $\mathrm{Nuc}\, f$.

Questão 8 Considere os pontos: $A=(2,2,1)$, $B=(3,2,1)$, $C=(3,1,2)$ e $Q=(0,3,1)$. Seja $\mathcal{P}$ o único plano que passa pelos pontos A, B e C.

(a) Determine $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

(b) Obtenha uma equação geral do plano $\mathcal{P}$.

(c) Calcule $d(Q,\mathcal{P})$.

Resposta:

(a) Consideremos os vectores: $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$. Sabemos que a base (e_1,e_2,e_3) (base canónica de $\mathbb{R}^3$) é ortonormada e directa.

Nesta conformidade,

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,0) = e_1,$$
$$\overrightarrow{AC} = (1,-1,1) = e_1 - e_2 + e_3.$$

Consequentemente,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \left(\text{mnemónica}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} e_3$$
$$= -e_2 - e_3 = (0,-1,-1).$$

(b) Uma equação geral do plano $\mathcal{P}$ que passa pelos pontos A, B e C tem $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,-1,-1)$ como vector normal. Assim se conclui que

$$0(x-2)-1(y-2)-1(z-1)=0 \Leftrightarrow -y-z=-3$$

é uma equação geral do plano $\mathcal{P}$ que passa pelos pontos A, B e C.

(c) Considere-se o vector $u=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,-1,-1)$ perpendicular ao plano $\mathcal{P}$ e o ponto $A=(2,2,1)$ pertencente a $\mathcal{P}$. Facilmente obtém-se $\overrightarrow{AQ}=-2e_1+e_2=(-2,1,0)$, donde $\overrightarrow{AQ}|u = (-2)\times 0 + 1\times(-1) + 0\times(-1) = -1$ e $\|u\|=\sqrt{2}$.

Consequentemente $d(Q,\mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AQ}|u|}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Questão 9 Seja $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ um endomorfismo tal que, para todo $x\in\mathbb{R}^3$, $\|f(x)\|=\|x\|$. Nesta conformidade, mostre que:

(a) f é um isomorfismo;

(b) para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}^3$, $f(x)|f(y)=x|y$.

Resposta:

(a) Recordemos que $\|u\|=0$ se, e só se, $u=0_{\mathbb{R}^3}$ qualquer que seja o vector u de $\mathbb{R}^3$. Em particular obtém-se $\|f(x)\|=0\Leftrightarrow f(x)=0_{\mathbb{R}^3}$ para todo o $x\in\mathbb{R}^3$. Deste modo e atendendo às hipóteses do problema deduz-se que

$$\mathrm{Nuc}\, f = \{x\in\mathbb{R}^3 : f(x)=0_{\mathbb{R}^3}\} = \{x\in\mathbb{R}^3 : \|f(x)\|=0\}$$
$$= \{x\in\mathbb{R}^3 : \|x\|=0\} = \{x\in\mathbb{R}^3 : x=0_{\mathbb{R}^3}\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Como $\operatorname{Nuc} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ a aplicação linear f é injectiva. Tratando-se f de um endomorfismo, e por isso uma aplicação linear entre espaços da mesma dimensão, conclui-se que f é um isomorfismo.

(b) Como $\|f(x)\| = \|x\|$, para todo o $x \in \mathbb{R}^3$, deduz-se que

$$f(x)|f(x) = x \mid x, \qquad (1)$$

para todo o $x \in \mathbb{R}^3$. Em particular, verifica-se que $f(x+y)|f(x+y) = (x+y)|(x+y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Deste modo, dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, obtém-se

$$\begin{aligned} & f(x+y)|f(x+y) = (x+y)|(x+y) \\ \Leftrightarrow\ & f(x)|f(x) + 2\, f(x)|f(y) + f(y)|f(y) = x|x + 2\, x|y + y|y \\ \Leftrightarrow\ & f(x)|f(y) = x|y && \text{(por (1)).} \end{aligned}$$