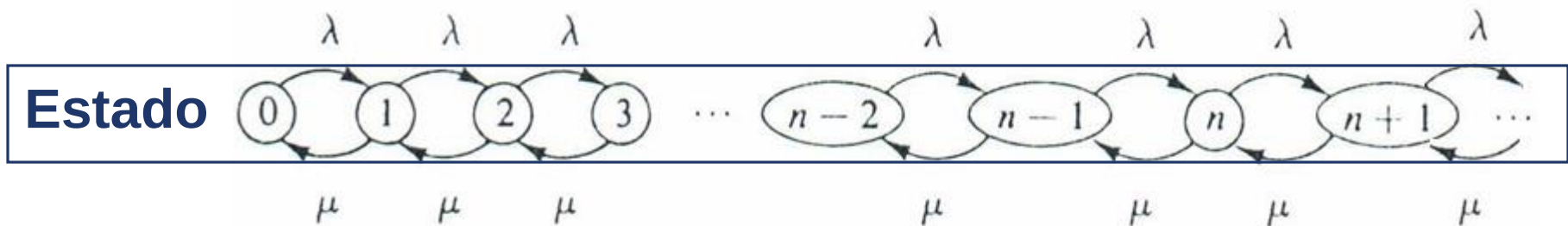

Introdução à Investigação Operacional

7ª aula T - Resumo

Modelo M/M/1

Diagrama de transição:



Fator de utilização (ou intensidade de tráfego) :

$$\rho = \lambda / \mu$$

Fórmulas de Little

$$L = \lambda W \quad ; \quad L_q = \lambda W_q$$

Taxa de desocupação do sistema, P_0 :

$$P_0 = 1 - \rho$$

Modelo M/M/1

Probabilidade de estarem exatamente n pessoas no sistema P_n

$$P_n = \rho^n \cdot P_0 = \rho^n \cdot (1 - \rho)$$

Número médio de clientes no sistema:

$$L = \rho / (1 - \rho), \text{ ou equivalentemente, } L = \lambda / (\mu - \lambda).$$

Relação entre o tempo médio de permanência de um cliente no sistema (W) e o tempo médio de espera na fila a aguardar o atendimento (W_q):

$$W = W_q + 1 / \mu$$

Nota: $1/\mu$ = tempo médio gasto no serviço

Relação entre o número médio de clientes no sistema (L), o comprimento médio da fila (L_q):

$$L = L_q + \lambda / \mu = L_q + \rho$$

Atenção: L_q não é igual a $L - 1$, mas sim a $L - \rho$!

Modelo M/M/1

Seja $\mathcal{W}$ a variável aleatória que denota o tempo de permanência de um cliente no sistema, incluindo o atendimento



Não confundir $\mathcal{W}$ com W !!!

$\mathcal{W} \sim \text{Exponencial}(\mu \cdot (1 - \rho))$

Probabilidade de um cliente estar mais do que t unidades de tempo no sistema (incluindo o atendimento):

$$P(\mathcal{W} > t) = e^{-\mu \cdot (1-\rho) \cdot t}, \text{ para } t \geq 0.$$

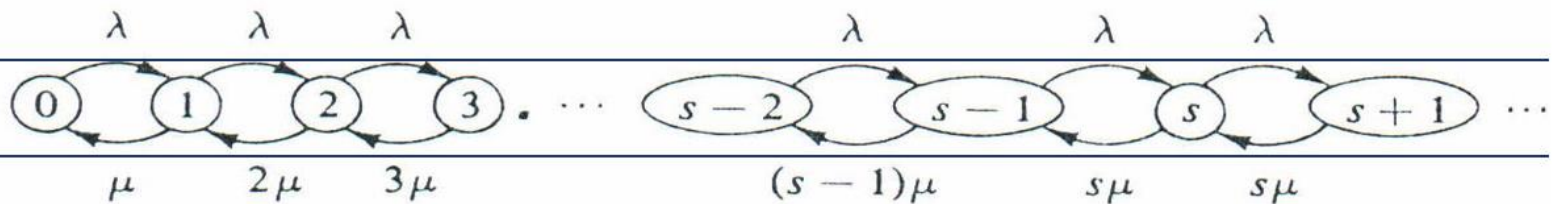
Taxa de desocupação = $P_0 = 1 - \rho = P(\mathcal{W}_q = 0)$.

Modelos M/M/s, M/M/1/K com pop. infinita e fila limitada,
M/M/s/K com pop. infinita e fila limitada

Diagramas de transição:

M/M/s

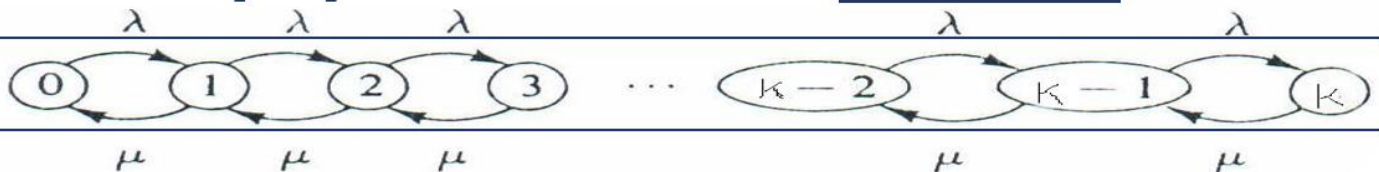
Estado



$$\mu_n = \begin{cases} n \cdot \mu & ; n = 1, 2, \dots, s \\ s \cdot \mu & ; n \geq s + 1 \end{cases}$$

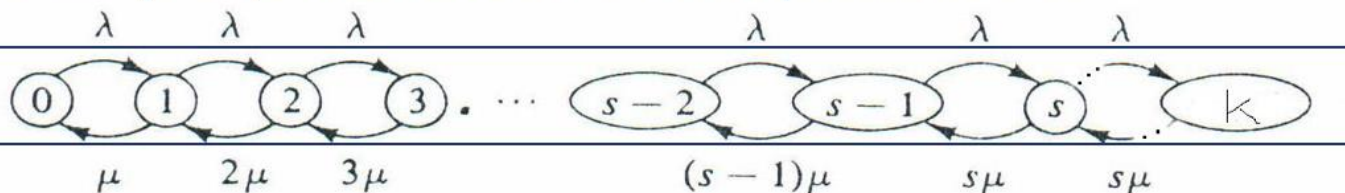
M/M/1/K com pop infinita e fila limitada

Estado



M/M/s/K com pop infinita e fila limitada

Estado

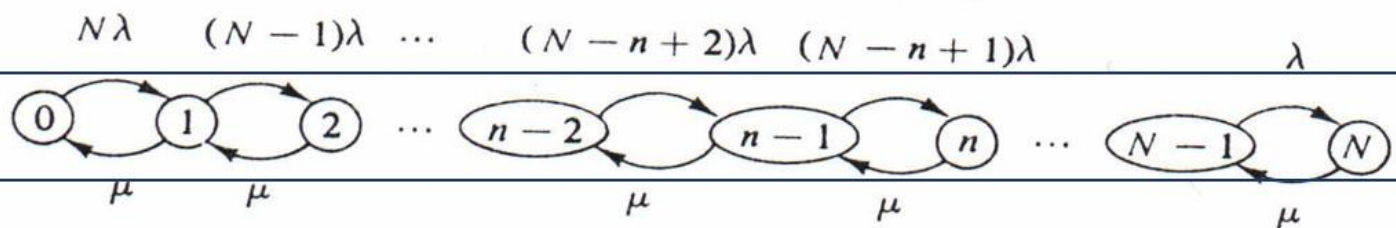


Modelos M/M/1/N, M/M/s/N com pop. finita e fila “ilimitada”

Diagramas de transição:

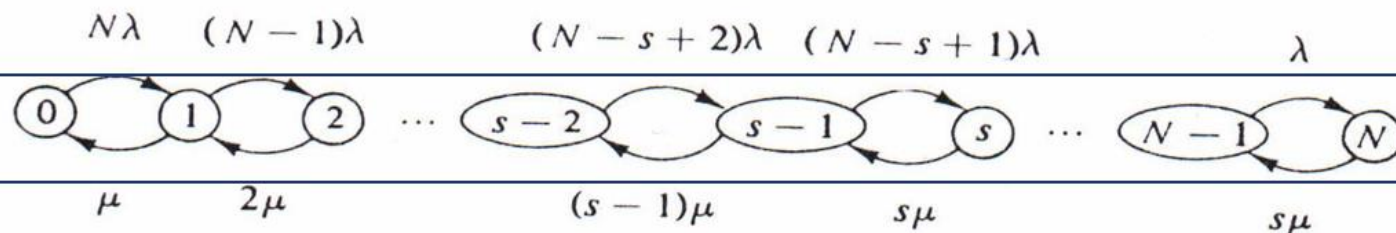
M/M/1/N

Estado



M/M/S/N

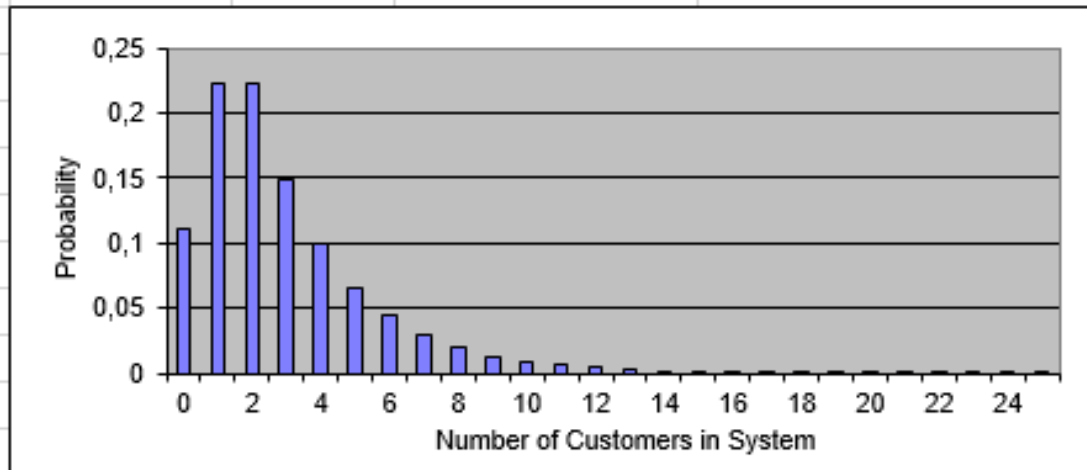
Estado



Resumo – IIO – T7

Folha de Cálculo Hillier e Lieberman para vários Modelos

	A	B	C	D	E	F	G
1	Template for M/M/s Queueing Model						
2							
3		Data				Results	
4		$\lambda =$	60	(mean arrival rate)		L =	2,888888889
5		$\mu =$	30	(mean service rate)		$L_q =$	0,888888889
6		s =	3	(# servers)		W =	0,048148148
7						$W_q =$	0,014814815
8		$\Pr(w > t) =$	1,34E-12			$\rho =$	0,666666667
9		when t =	1			$P_0 =$	0,111111111
10						$P_1 =$	0,222222222
11		$\text{Prob}(w_q > t) =$	4,16E-14			$P_2 =$	0,222222222
12		when t =	1			$P_3 =$	0,148148148
13						$P_4 =$	0,098765432
14						$P_5 =$	0,065843621
15						$P_6 =$	0,043895748
16						$P_7 =$	0,029263832
17						$P_8 =$	0,019509221
18						$P_9 =$	0,013006147
19						$P_{10} =$	0,008670765
20						$P_{11} =$	0,00578051
21						$P_{12} =$	0,003853673
22						$P_{13} =$	0,002569116
23							
24							
25							



Leituras de apoio:

Elementos de apoio às aulas de IIO – Teoria das Filas de Espera (Modelos baseados na distr. Exponencial)-
ficheiro pdf pp. **190** a **207**.

Disponível atividade semanal de apoio à aprendizagem no moodle!