Capítulo XII

Corte Mínimo
(num grafo não orientado e pesado)

—

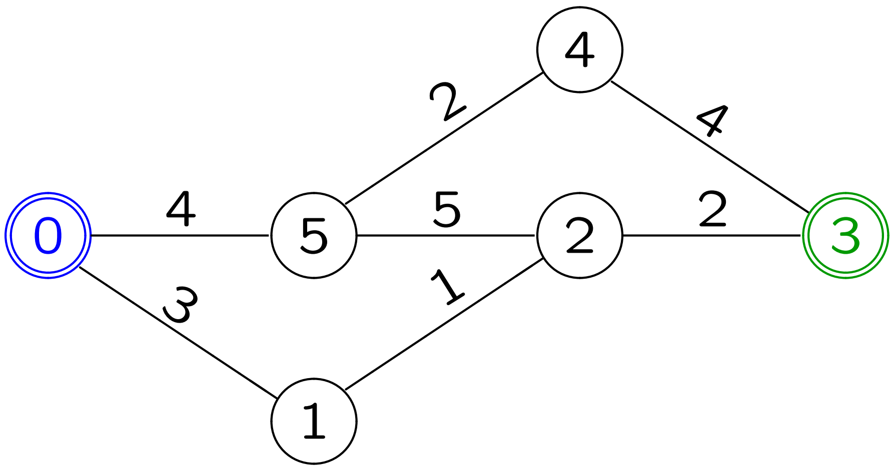
Transformação e Conquista

Problema

Pretende-se remover um conjunto de arcos do grafo de forma a deixar de haver caminho entre os vértices 0 e 3.

Mas a soma dos pesos dos arcos removidos tem de ser a menor possível.

Como obter um conjunto com estas propriedades?

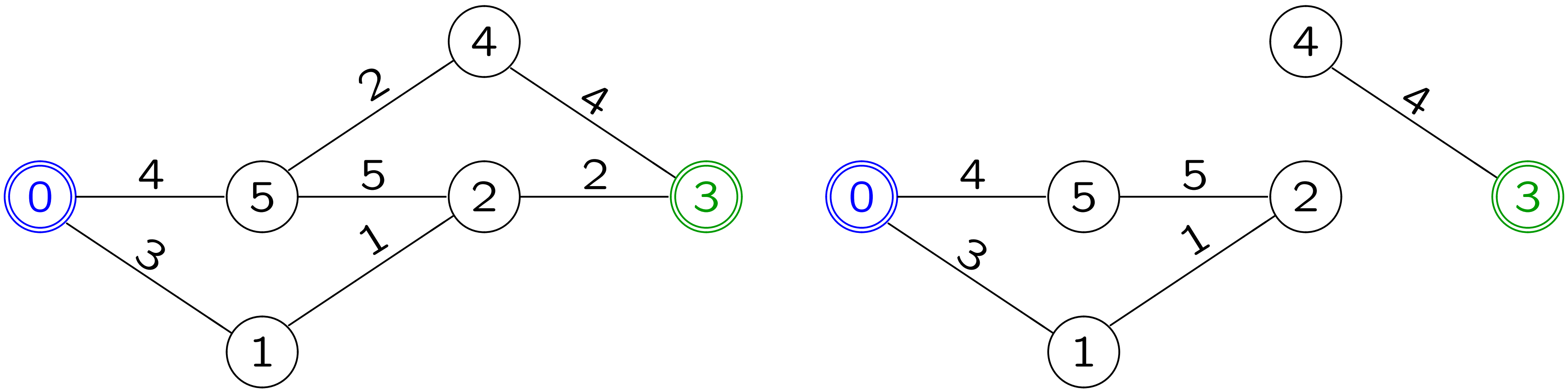


Problema

Pretende-se remover um conjunto de arcos do grafo de forma a deixar de haver caminho entre os vértices 0 e 3.

Mas a soma dos pesos dos arcos removidos tem de ser a menor possível.

Como obter um conjunto com estas propriedades?



Conjunto $C = \{(5, 4),\ (2, 3)\}$

Soma dos pesos dos arcos de C: 4

Corte (*Cut*)

Sejam $G = (V, A)$ um grafo **não orientado** e **pesado** (com pesos não negativos) e $f, d \in V$ dois vértices distintos. Assume-se que qualquer vértice pertence a um caminho entre f e d.

Um **corte** $f - d$ é uma partição $\{F, D\}$ de V tal que $f \in F$ e $d \in D$.

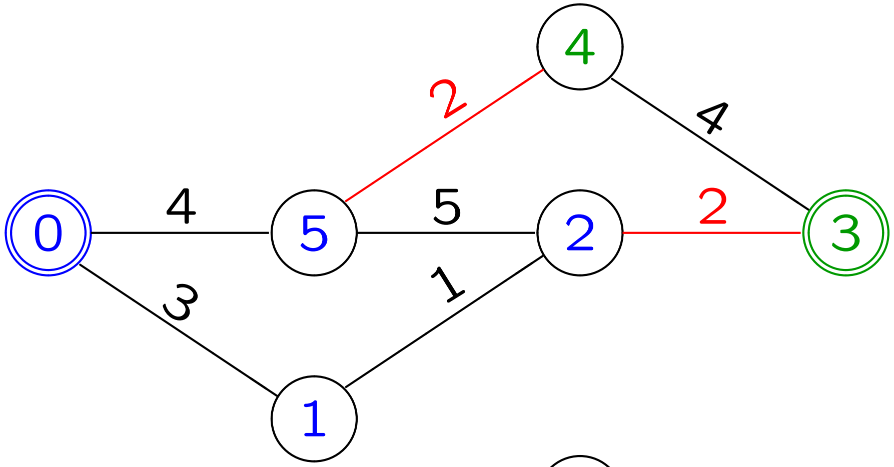
O **conjunto de arcos do corte** $\{F, D\}$ é o conjunto dos arcos com uma extremidade em F e outra em D:

$$C_{F,D} = \{(v, w) \in A \mid v \in F, \; w \in D\}.$$

A **capacidade do corte** $\{F, D\}$ é a soma dos pesos dos arcos do corte:

$$\text{capacidade}(C_{F,D}) = \sum_{(v,w) \in C_{F,D}} \text{peso}(v, w).$$

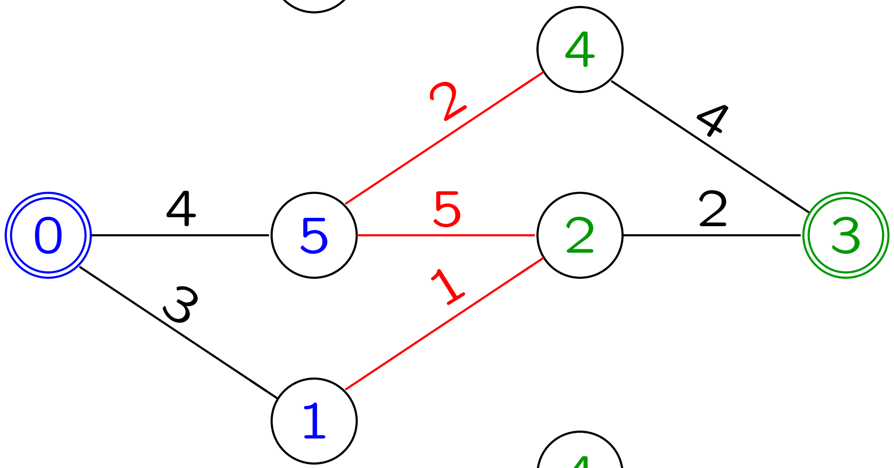
Um **corte mínimo** é um corte cuja capacidade é a menor possível.



$$F = \{0,1,2,5\}, \quad D = \{3,4\}$$

$$C_{F,D} = \{(5,4),(2,3)\}$$

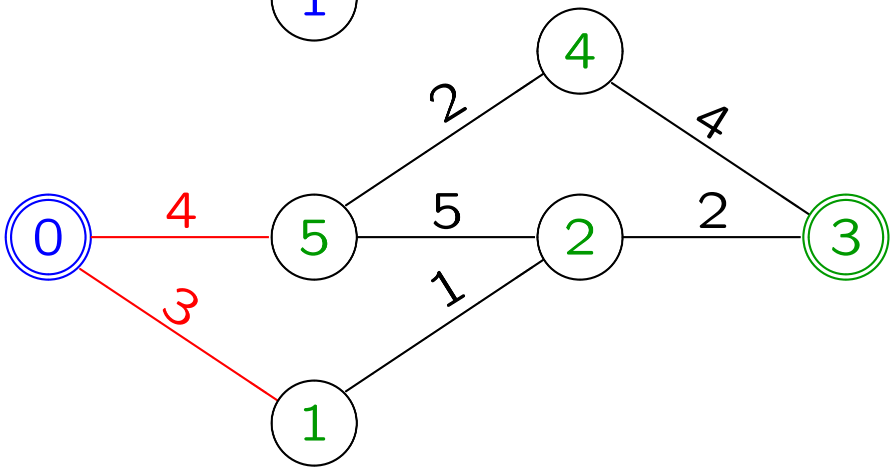
$$\text{capacidade}(C_{F,D}) = 4$$



$$F = \{0,1,5\}, \quad D = \{2,3,4\}$$

$$C_{F,D} = \{(5,4),(5,2),(1,2)\}$$

$$\text{capacidade}(C_{F,D}) = 8$$



$$F = \{0\}, \quad D = \{1,2,3,4,5\}$$

$$C_{F,D} = \{(0,5),(0,1)\}$$

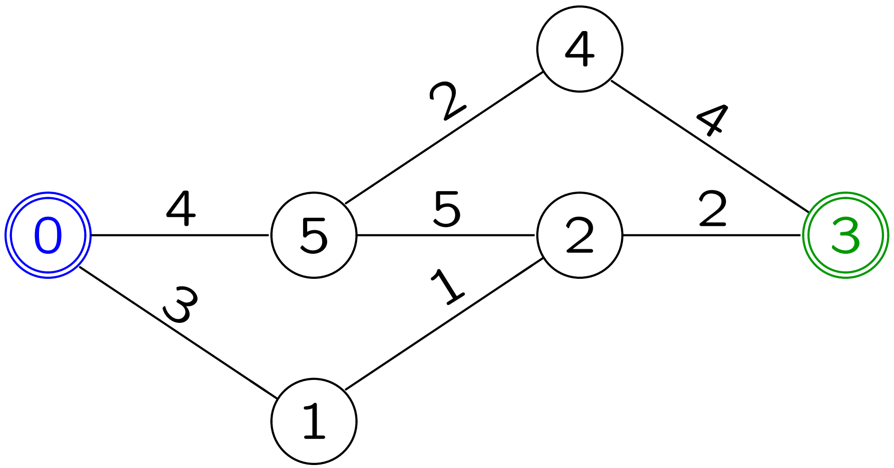
$$\text{capacidade}(C_{F,D}) = 7$$

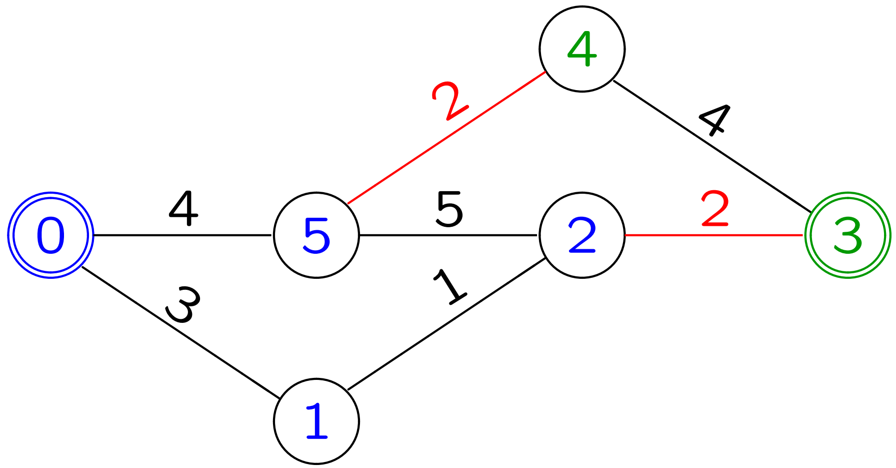
Problema

Pretende-se remover um conjunto de arcos do grafo de forma a deixar de haver caminho entre os vértices 0 e 3.

Mas a soma dos pesos dos arcos removidos tem de ser a menor possível.

Como obter um conjunto com estas propriedades?





Como obter (os arcos de) um corte 0−3 mínimo no grafo não orientado e pesado?

Teorema do fluxo-máximo corte-mínimo (*max-flow min-cut theorem*)

Sejam:

- $G = (V, A)$ um grafo não orientado e pesado (com pesos não negativos);
- $f, d \in V$ dois vértices distintos.

Assume-se que qualquer vértice pertence a um caminho entre f e d.

O valor de um fluxo máximo de f para d em G

é igual

à capacidade dos cortes f−d mínimos em G.

Construção de um corte-mínimo $f-d$ (a partir de um fluxo-máximo de f para d)

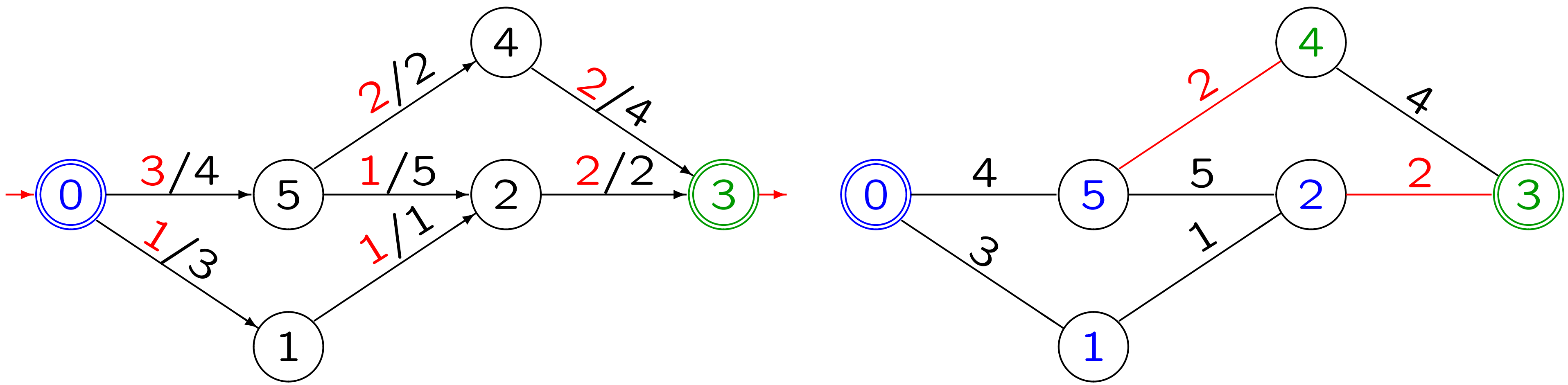
1. Calcula-se um fluxo máximo ϕ de f para d no grafo orientado correspondente.

   Para cada arco (não orientado) do grafo original,
   há dois arcos com sentidos opostos no grafo orientado,
   ambos com o peso do arco original.

2. Calcula-se o conjunto (F) dos vértices para os quais há caminho a partir de f na rede residual induzida por ϕ.

3. A partição $\{F, V \setminus F\}$ é um corte $f-d$ mínimo.

Fluxo-Máximo / Corte-Mínimo



1. Calcula-se um fluxo máximo ϕ de 0 para 3 no grafo orientado correspondente (figura da esquerda, omitindo os arcos com fluxo < 0).
2. Calcula-se o conjunto (F) dos vértices para os quais há caminho a partir de 0 na rede residual induzida por ϕ: $F = \{0, 1, 2, 5\}$
3. A partição $\{F, V \setminus F\}$ é um corte 0−3 mínimo:

$$\begin{aligned} F &= \{0, 1, 2, 5\} \\ D &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \setminus F = \{3, 4\} \end{aligned}$$