Capítulo VI

Árvore Mínima de Cobertura

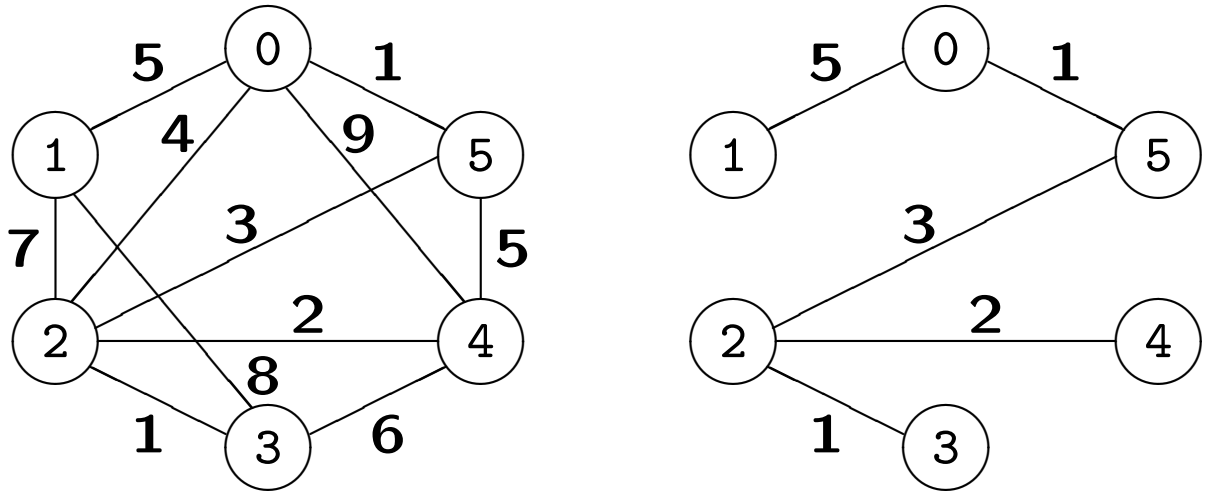
(num grafo não orientado, conexo e pesado)

—

Algoritmo de Kruskal

Problema

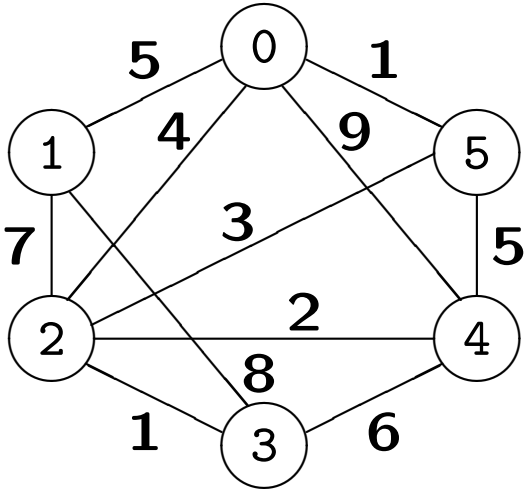
Como ligar um dado equipamento, minimizando a soma dos comprimentos das ligações?



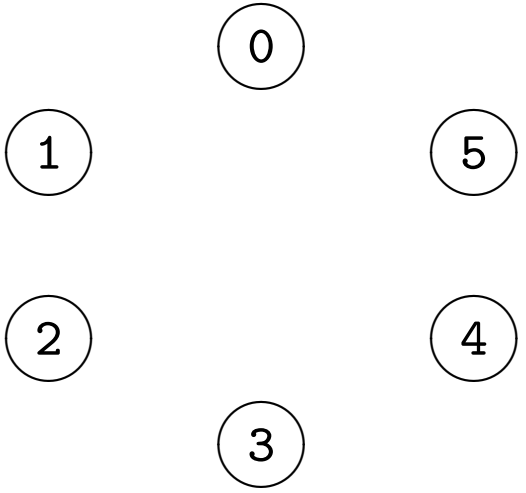
Árvore de Cobertura (sub-grafo acíclico e conexo com todos os vértices) de custo Mínimo (nenhuma árvore de cobertura tem custo menor).

Dado um grafo **não orientado, conexo e pesado**, como obter uma **Árvore Mínima de Cobertura**?

Algoritmo de Kruskal [1956]

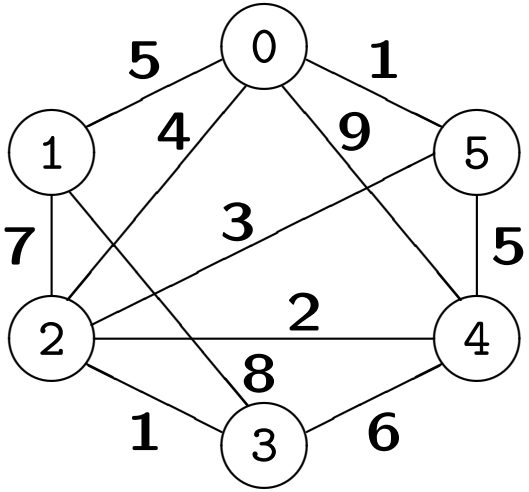


1 $0 \longleftrightarrow 5$
1 $2 \longleftrightarrow 3$
2 $2 \longleftrightarrow 4$
3 $2 \longleftrightarrow 5$
4 $0 \longleftrightarrow 2$
5 $0 \longleftrightarrow 1$
5 $4 \longleftrightarrow 5$
6 $3 \longleftrightarrow 4$
7 $1 \longleftrightarrow 2$
8 $1 \longleftrightarrow 3$
9 $0 \longleftrightarrow 4$

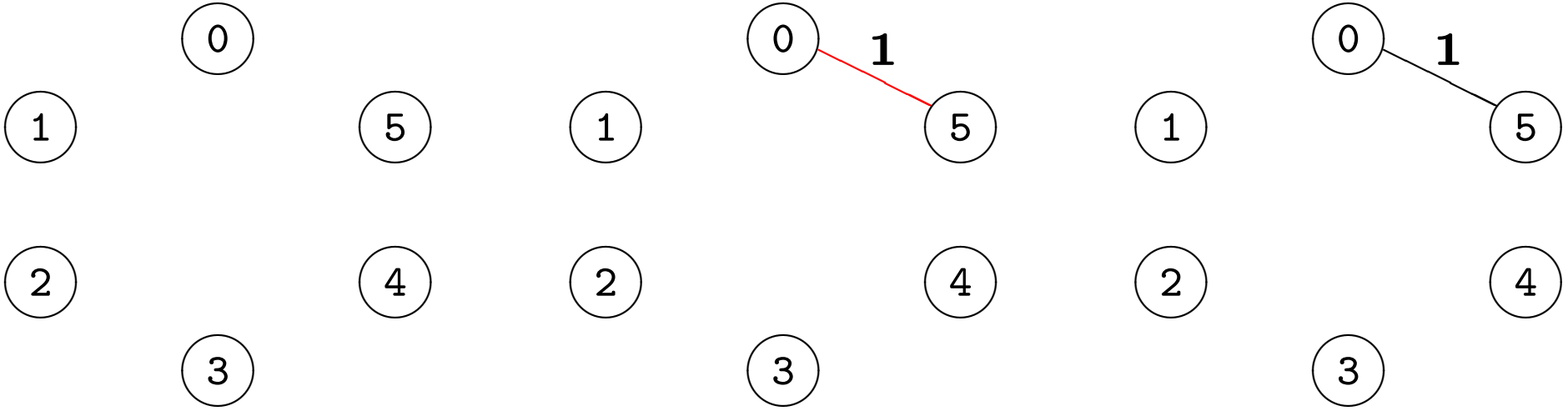


Algoritmo Greedy

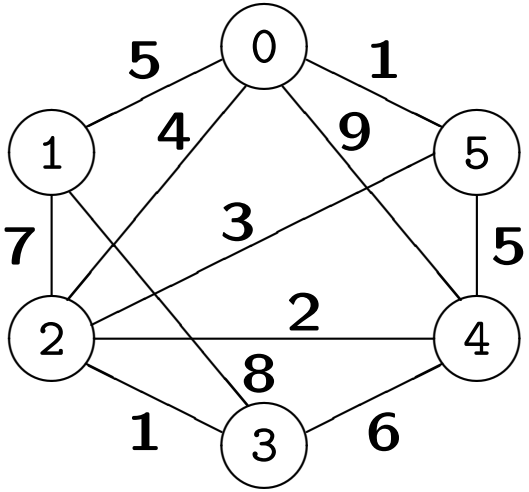
Algoritmo de Kruskal (1)



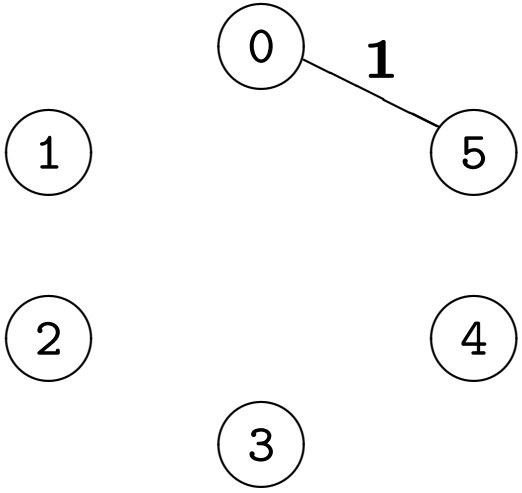
1	$0 \longleftrightarrow 5$
1	$2 \longleftrightarrow 3$
2	$2 \longleftrightarrow 4$
3	$2 \longleftrightarrow 5$
4	$0 \longleftrightarrow 2$
5	$0 \longleftrightarrow 1$
5	$4 \longleftrightarrow 5$
6	$3 \longleftrightarrow 4$
7	$1 \longleftrightarrow 2$
8	$1 \longleftrightarrow 3$
9	$0 \longleftrightarrow 4$

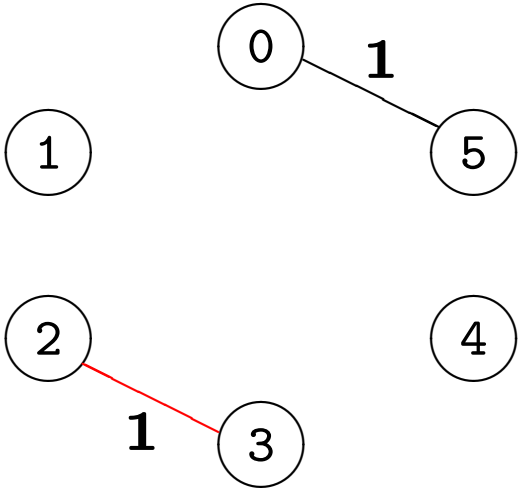


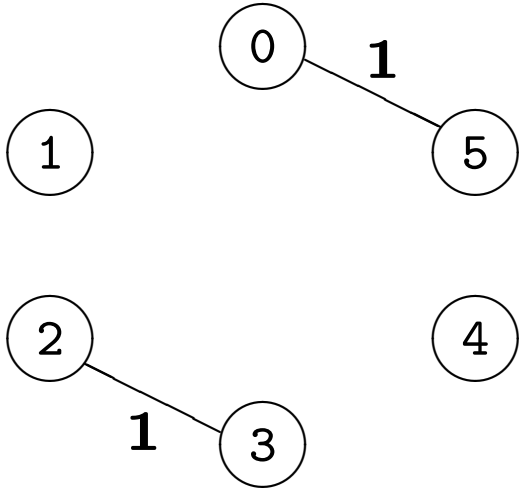
Algoritmo de Kruskal (2)



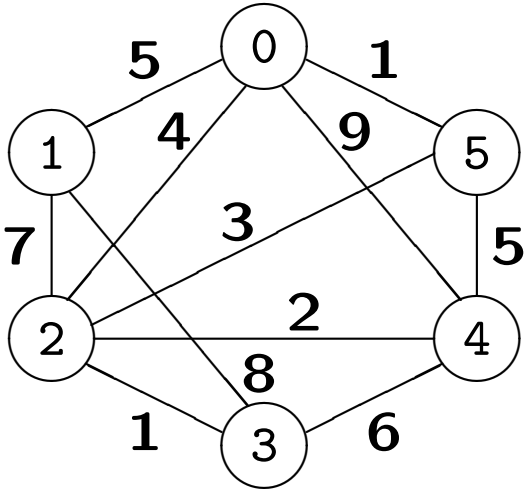
1	$0 \longleftrightarrow 5$	$\surd$
1	$2 \longleftrightarrow 3$	
2	$2 \longleftrightarrow 4$	
3	$2 \longleftrightarrow 5$	
4	$0 \longleftrightarrow 2$	
5	$0 \longleftrightarrow 1$	
5	$4 \longleftrightarrow 5$	
6	$3 \longleftrightarrow 4$	
7	$1 \longleftrightarrow 2$	
8	$1 \longleftrightarrow 3$	
9	$0 \longleftrightarrow 4$	



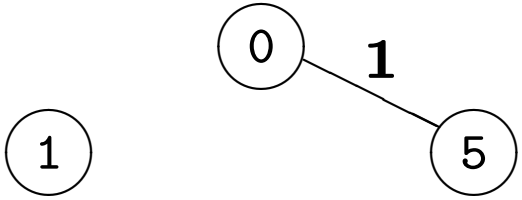


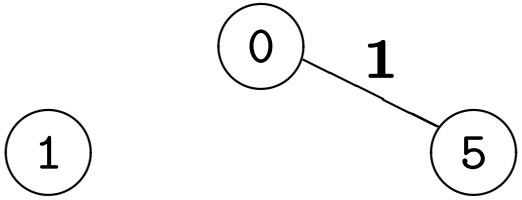


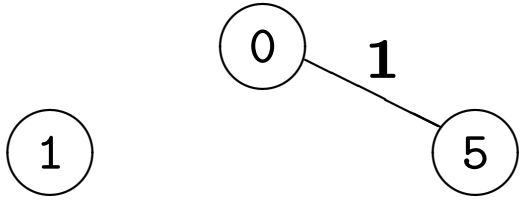
Algoritmo de Kruskal (3)



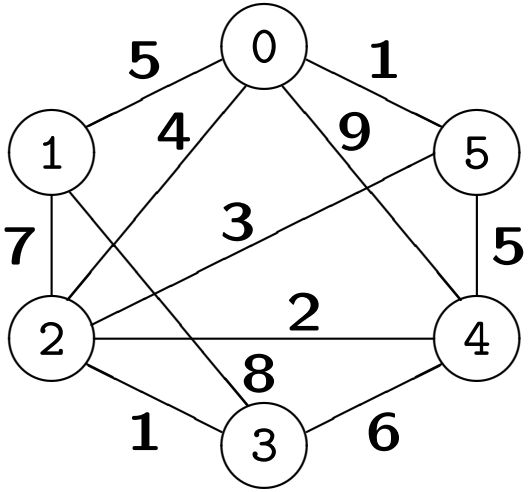
1	$0 \longleftrightarrow 5$	$\surd$
1	$2 \longleftrightarrow 3$	$\surd$
2	$2 \longleftrightarrow 4$	
3	$2 \longleftrightarrow 5$	
4	$0 \longleftrightarrow 2$	
5	$0 \longleftrightarrow 1$	
5	$4 \longleftrightarrow 5$	
6	$3 \longleftrightarrow 4$	
7	$1 \longleftrightarrow 2$	
8	$1 \longleftrightarrow 3$	
9	$0 \longleftrightarrow 4$	





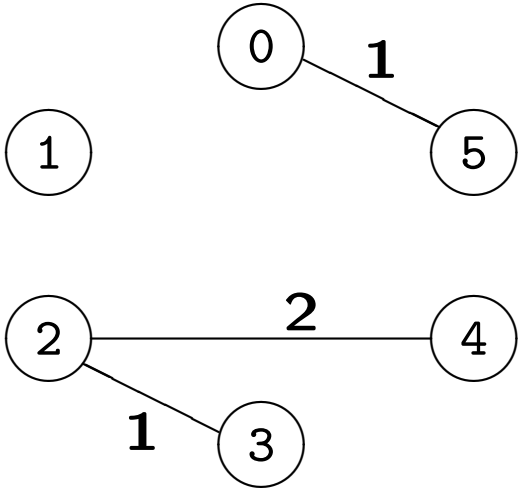


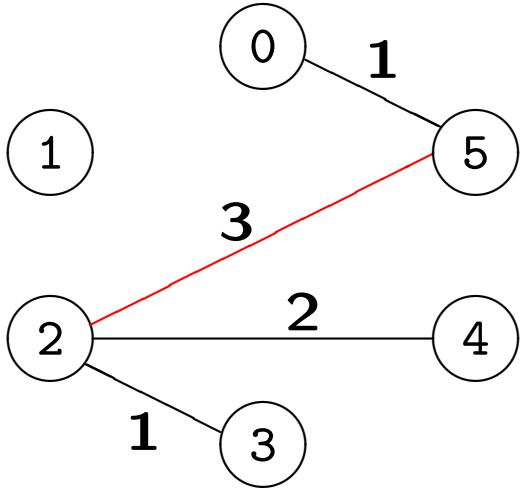
Algoritmo de Kruskal (4)

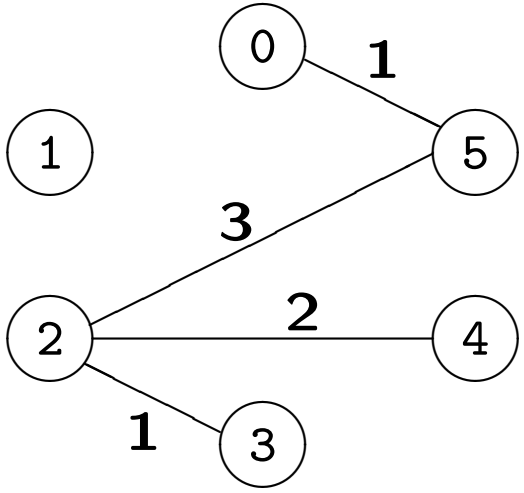


1	$0 \longleftrightarrow 5$	$\surd$
1	$2 \longleftrightarrow 3$	$\surd$
2	$2 \longleftrightarrow 4$	$\surd$
3	$2 \longleftrightarrow 5$	
4	$0 \longleftrightarrow 2$	
5	$0 \longleftrightarrow 1$	

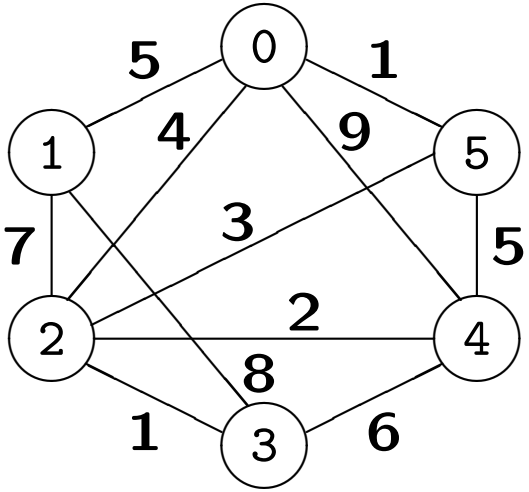
5	$4 \longleftrightarrow 5$
6	$3 \longleftrightarrow 4$
7	$1 \longleftrightarrow 2$
8	$1 \longleftrightarrow 3$
9	$0 \longleftrightarrow 4$





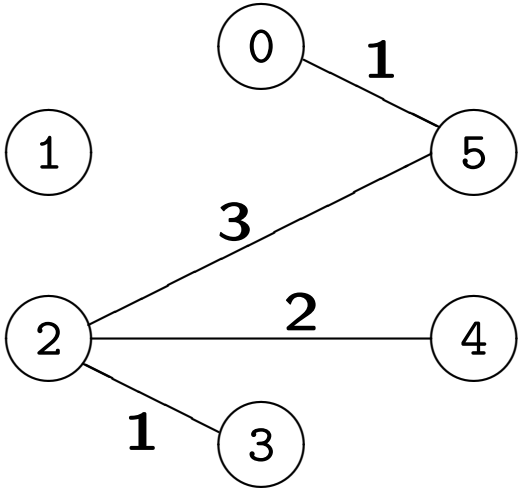


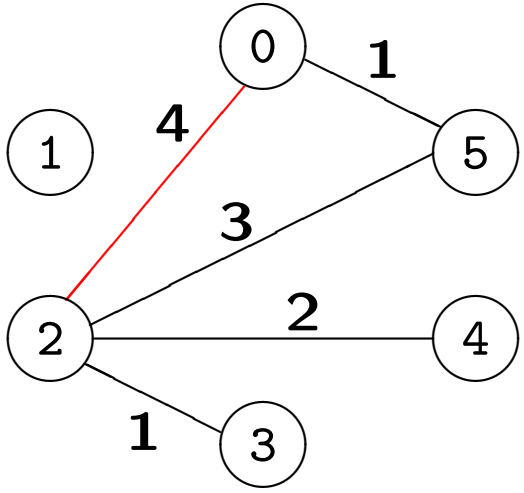
Algoritmo de Kruskal (5)

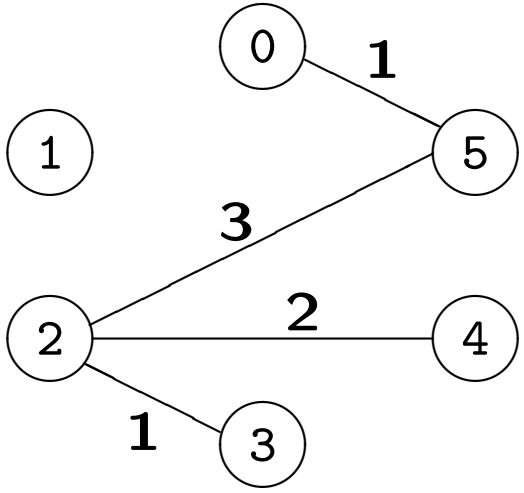


1	$0 \longleftrightarrow 5$	$\surd$
1	$2 \longleftrightarrow 3$	$\surd$
2	$2 \longleftrightarrow 4$	$\surd$
3	$2 \longleftrightarrow 5$	$\surd$
4	$0 \longleftrightarrow 2$	
5	$0 \longleftrightarrow 1$	

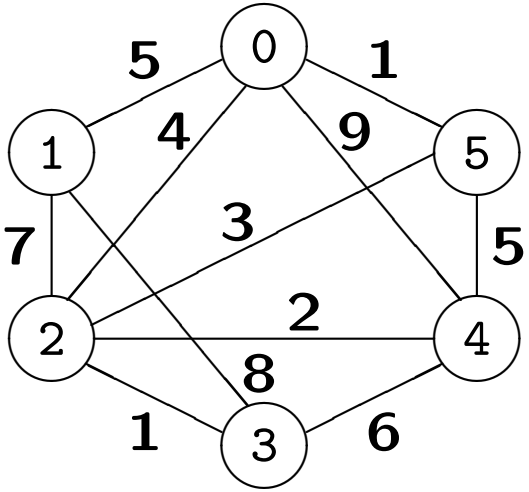
5	$4 \longleftrightarrow 5$
6	$3 \longleftrightarrow 4$
7	$1 \longleftrightarrow 2$
8	$1 \longleftrightarrow 3$
9	$0 \longleftrightarrow 4$





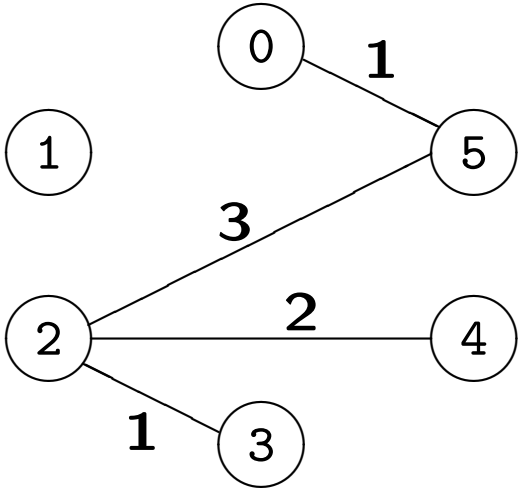


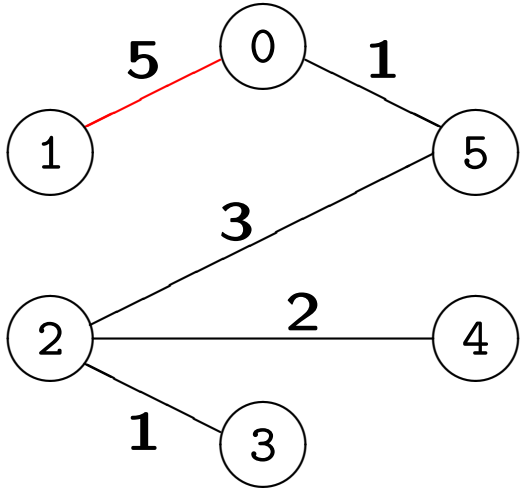
Algoritmo de Kruskal (6)

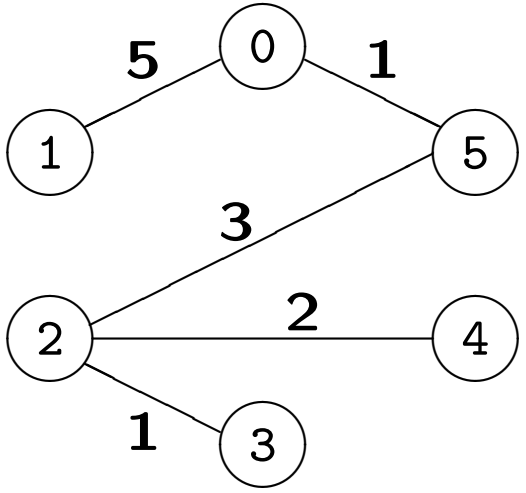


1	$0 \longleftrightarrow 5$	$\surd$
1	$2 \longleftrightarrow 3$	$\surd$
2	$2 \longleftrightarrow 4$	$\surd$
3	$2 \longleftrightarrow 5$	$\surd$
4	$0 \longleftrightarrow 2$	
5	$0 \longleftrightarrow 1$	

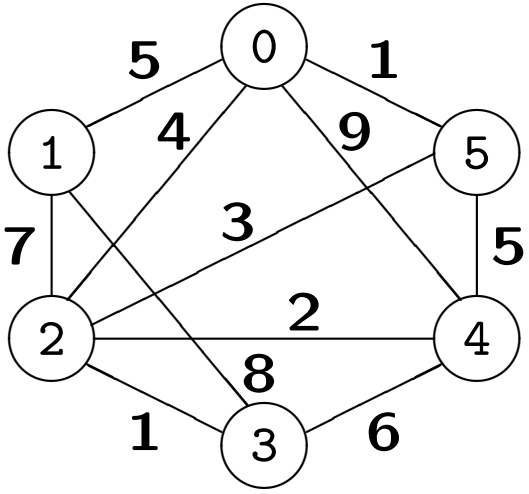
5	$4 \longleftrightarrow 5$
6	$3 \longleftrightarrow 4$
7	$1 \longleftrightarrow 2$
8	$1 \longleftrightarrow 3$
9	$0 \longleftrightarrow 4$





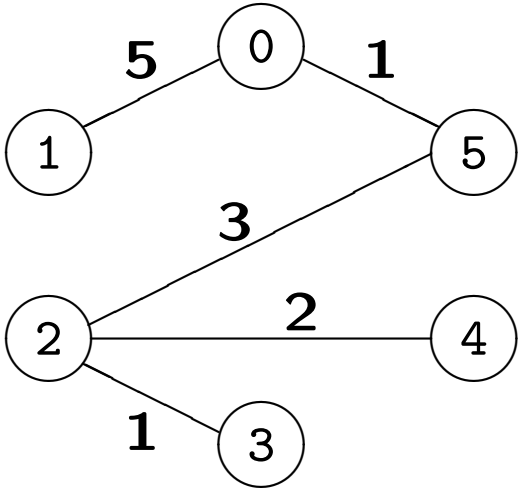


Algoritmo de Kruskal (7)



1	$0 \longleftrightarrow 5$	$\surd$
1	$2 \longleftrightarrow 3$	$\surd$
2	$2 \longleftrightarrow 4$	$\surd$
3	$2 \longleftrightarrow 5$	$\surd$
4	$0 \longleftrightarrow 2$	
5	$0 \longleftrightarrow 1$	$\surd$

5	$4 \longleftrightarrow 5$
6	$3 \longleftrightarrow 4$
7	$1 \longleftrightarrow 2$
8	$1 \longleftrightarrow 3$
9	$0 \longleftrightarrow 4$



Custo da Árvore:

$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$

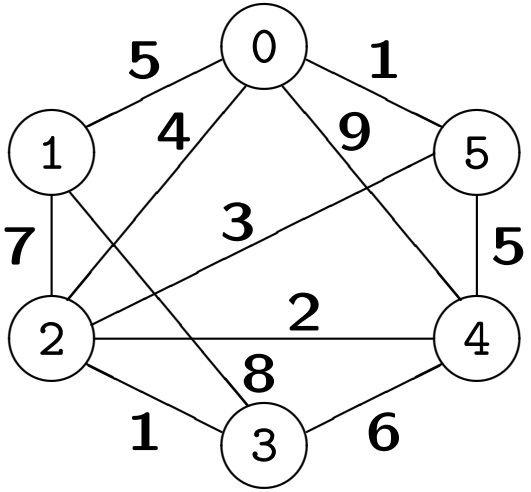
Como obter os arcos por ordem?

- Ordenam-se os arcos com um algoritmo de ordenação: $O(|A| \log |A|)$

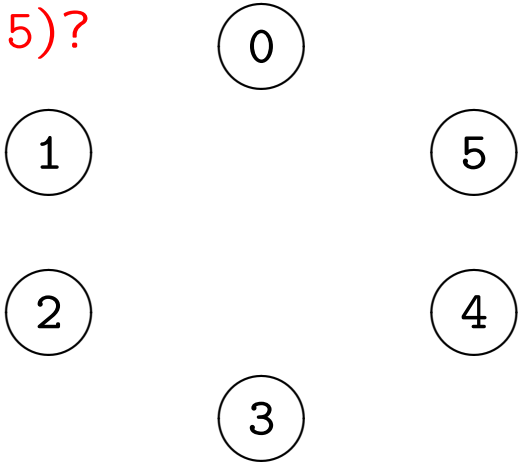
  E se se analisarem apenas k arcos, com $k \ll |A|$?

- Colocam-se os arcos todos numa ED e, em cada passo, remove-se um arco com peso mínimo.
  - ED é vetor (desordenado) ou lista ligada: $O(|A|^2)$
  - ED é AVL ou red-black: $O(|A| \log |A|)$
  - ED é heap binário (construído com A): $O(|A| + k \log |A|)$

Se inserir "este" arco, haverá ciclos? (1)

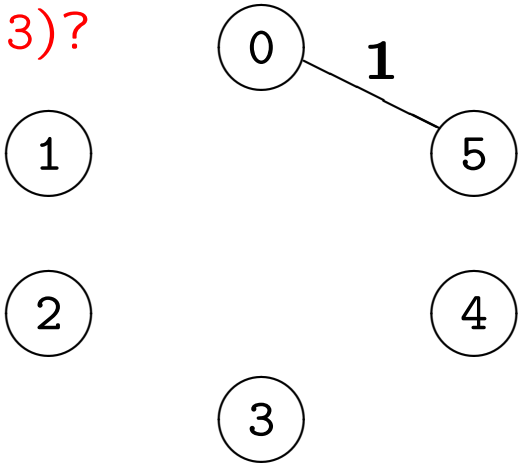


$(0,5)$?

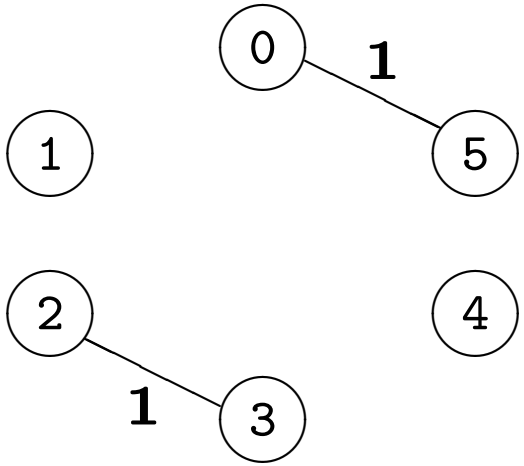


$\{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$

$(2,3)$?



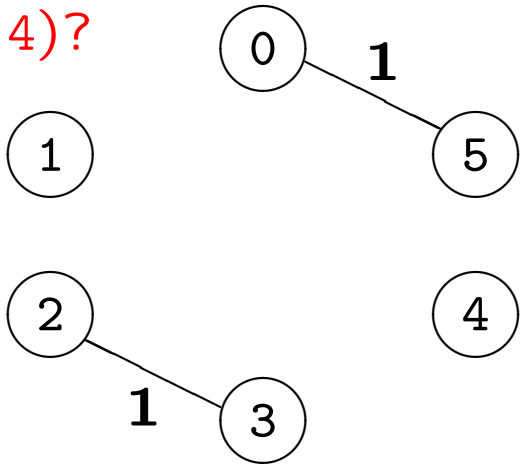
$\{\{0,5\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$



$\{\{0,5\},\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$

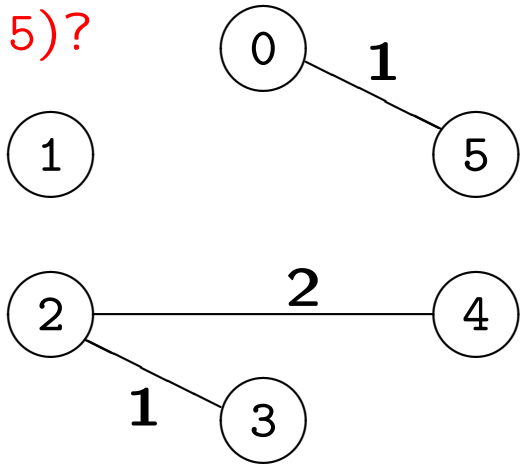
Se inserir "este" arco, haverá ciclos? (2)

$(2,4)$?



$\{\{0,5\},\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$

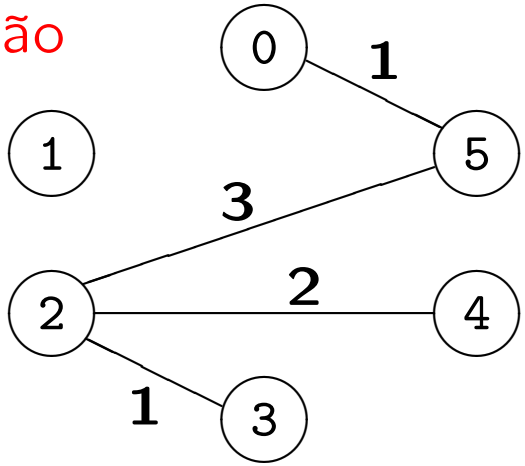
$(2,5)$?



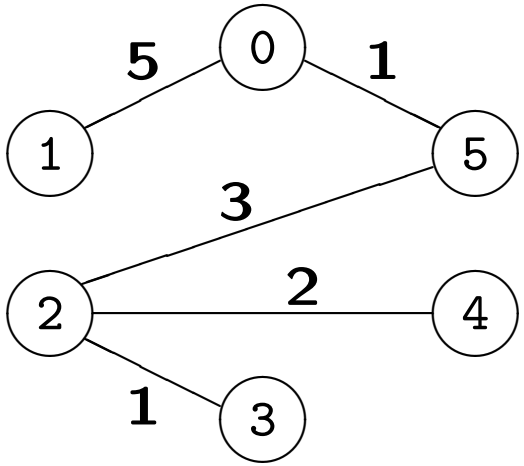
$\{\{0,5\},\{1\},\{2,3,4\}\}$

$(0,2)$? Não

$(0,1)$?



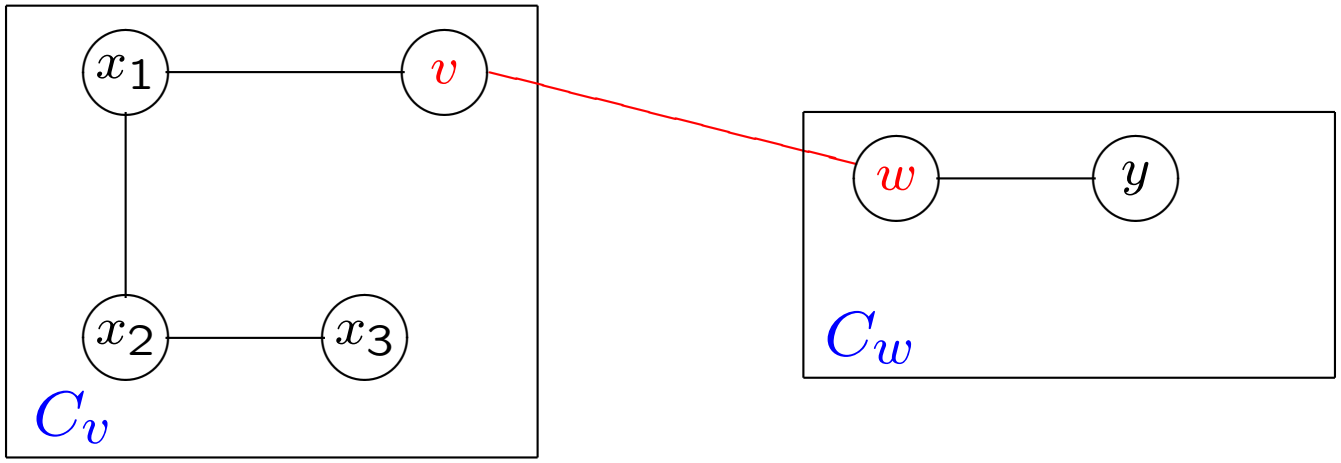
$\{\{0,5,2,3,4\},\{1\}\}$



$\{\{0,1,2,3,4,5\}\}$

Caminhos & Partição

- **No início:**
  - O grafo não tem arcos; só há caminhos de comprimento 0
  - A partição é $\{\{v_1\}, \{v_2\}, \ldots, \{v_k\}\}$, se $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
- **Inserção do arco** (v, w)**:** (apenas quando $C_v \neq C_w$)



  - No grafo: há caminho entre quaisquer dois vértices de $C_v \cup C_w$
  - Na partição: substitui-se C_v e C_w por $C_v \cup C_w$

TAD Partição (com n elementos)

Os elementos dos conjuntos são $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Cada conjunto é identificado por um dos seus elementos, denominado **o representante** do conjunto.

Domínio $= \{0, 1, ..., n-1\}$

// Cria a partição $\{\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n-1\}\}$.
Partição **cria**(**int** n);

// Devolve o representante do conjunto ao qual e pertence.
Domínio **representante**(Domínio e);

// Substitui os conjuntos C_e e C_f, cujos representantes são e e f,
// respetivamente, pelo conjunto $C_e \cup C_f$.
// **Pré-condição:** $e \neq f$ (ou seja, $C_e \neq C_f$).
void **reunião**(Domínio e, Domínio f);

Interface Partição (com n elementos)

```
public interface UnionFind {

    // Creates the partition {{0},{1},...,{domainSize − 1}}.
    // UnionFind( int domainSize );

    // Returns the representative of the set that contains
    // the specified element.
    int find( int element ) throws InvalidElementException;

    // Removes the two distinct sets S1 and S2 whose representatives
    // are the specified elements, and inserts the set S1 ∪ S2.
    // The representative of the new set S1 ∪ S2 can be any of
    // its members.
    void union( int representative1, int representative2 ) throws
        InvalidElementException, NotRepresentativeException,
        EqualSetsException;
}
```

Construir a Fila com Prioridade de Arcos (Java)

```
@SuppressWarnings( "unchecked" )
MinPriorityQueue<L, Edge<L>> buildQueue( UndiGraph<L> graph ) {

    Entry<L, Edge<L>>[] auxArray = new Entry[ graph.numEdges() ];

    int pos = 0;
    for every Edge<L> e in graph.edges()
        auxArray[pos++] = new EntryClass<>(e.label(), e);

    MinPriorityQueue<L, Edge<L>> priQueue =
        new MinHeap<>(auxArray);

    return priQueue;
}
```

Árvore Mínima de Cobertura (1)

(Minimum Spanning Tree)

```
Edge<L>[] mstKruskal( UndiGraph<L> graph ) {

    MinPriorityQueue<L, Edge<L>> allEdges = buildQueue(graph);

    UnionFind nodesPartition =
        new UnionFindInArray( graph.numNodes() );

    int mstFinalSize = graph.numNodes() - 1;

    Edge<L>[] mst = new Edge<>[ mstFinalSize ];

    int mstSize = 0;
```

Árvore Mínima de Cobertura (2)

```
    while ( mstSize < mstFinalSize ) {
        Edge<L> edge = allEdges.removeMin().getValue();
        int rep1 = nodesPartition.find( edge.firstNode() );
        int rep2 = nodesPartition.find( edge.secondNode() );
        if ( rep1 != rep2 ) {
            mst[ mstSize++ ] = edge;
            nodesPartition.union(rep1, rep2);
        }
    }
    return mst;
}
```

Complexidade

Identificação das Operações

criação do heap	$\Theta(\|A\|)$
criação da partição	?
criação do vetor resultado	$\Theta(1)$
Ciclo (executado entre $\|V\| - 1$ e $\|A\|$ vezes)	
1 remoção do mínimo	$O(\log \|A\|)$
2 representante	?
Ciclo (executado $\|V\| - 1$ vezes)	
1 inserção no vetor	$\Theta(1)$
1 reunião	?

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião sem Estratégia

Representante sem Efeitos Laterais

criação do heap	$\Theta(\|A\|)$
criação da partição	$\Theta(\|V\|)$
criação do vetor resultado	$\Theta(1)$
Ciclo (executado entre $\|V\|-1$ e $\|A\|$ vezes)	(ver próximo slide)
1 remoção do mínimo	$O(\log \|A\|)$
2 representante	$O(\|V\|)$
Ciclo (executado $\|V\|-1$ vezes)	
1 inserção no vetor	$\Theta(1)$
1 reunião	$\Theta(1)$
TOTAL	$O(\|A\| \times \|V\|)$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião sem Estratégia

Representante sem Efeitos Laterais

Complexidade do Primeiro Ciclo

$$O(\quad |A| \times \log |A| \quad + \quad |A| \times (2\mathbf{R}) \quad)$$

$$O(\quad |A| \times \underbrace{\log |A|}_{\log |A| < 2 \log |V| \text{ porque } |A| < |V|^2} \quad + \quad |A| \times |V| \quad)$$

$$O(\quad |A| \times \log |V| \quad + \quad |A| \times |V| \quad)$$

$$O(\qquad\qquad\qquad |A| \times |V| \quad)$$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Altura ou por Tamanho

Representante sem Efeitos Laterais

criação do heap	$\Theta(\|A\|)$
criação da partição	$\Theta(\|V\|)$
criação do vetor resultado	$\Theta(1)$
Ciclo (executado entre $\|V\|-1$ e $\|A\|$ vezes)	(ver próximo slide)
1 remoção do mínimo	$O(\log \|A\|)$
2 representante	$O(\log \|V\|)$
Ciclo (executado $\|V\|-1$ vezes)	
1 inserção no vetor	$\Theta(1)$
1 reunião	$\Theta(1)$
TOTAL	$O(\|A\| \times \log \|V\|)$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Altura ou por Tamanho

Representante sem Efeitos Laterais

Complexidade do Primeiro Ciclo

$$O(\ |A| \times \log |A| \ + \ |A| \times (2\mathbf{R})\ )$$

$$O(\ |A| \times \log |V| \ + \ |A| \times \log |V|\ )$$

$$O(\ |A| \times \log |V|\ )$$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Nível ou por Tamanho

Representante com Compressão do Caminho

criação do heap	$\Theta(\|A\|)$
criação da partição	$\Theta(\|V\|)$
criação do vetor resultado	$\Theta(1)$
Ciclo (executado entre $\|V\|-1$ e $\|A\|$ vezes)	(ver próximo slide)
1 remoção do mínimo	$O(\log \|A\|)$
2 representante	$O(\log \|V\|)$
Ciclo (executado $\|V\|-1$ vezes)	
1 inserção no vetor	$\Theta(1)$
1 reunião	$\Theta(1)$
TOTAL	$O(\|A\| \times \log \|V\|)$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Nível ou por Tamanho

Representante com Compressão do Caminho

Complexidade do Primeiro Ciclo

$$O(\quad |A| \times \log |A| \quad + \quad \underbrace{|A| \times (2\mathbf{R})}_{2|A| \geq 2(|V|-1) \geq |V|} \quad)$$

$$O(\quad |A| \times \log |V| \quad + \quad (2|A|) \; \underbrace{\alpha(2|A|, |V|)}_{\leq 4} \quad)$$

$$O(\quad |A| \times \log |V| \quad + \quad |A| \quad)$$

$$O(\quad |A| \times \log |V| \quad)$$