

2º Teste

– Com consulta limitada –

I) [6val] O *Chemlany*, *Maiyo*, *Nebebew*, *Kiptum*, *Shiferaw* e *Wanjiku* foram os 6 primeiros classificados da maratona de Lisboa de 2019, mas não necessariamente por esta ordem. Sobre a ordem de chegada, sabemos o seguinte:

1. O *Nebebew* não foi o último a chegar.
2. O *Wanjiku*, *Chemlany* e *Shiferaw* chegaram antes do *Maiyo* e do *Nebebew*.
3. O *Wanjiku* obteve uma classificação melhor do que em 2017, ano em que foi 3º.
4. O *Kiptum* terminou entre os primeiros 4 classificados.
5. O *Shiferaw* não foi 2º nem 3º classificado.
6. O *Chemlany* bateu o *Maiyo* por três lugares.
7. Nem o *Shiferaw* nem o *Wanjiku* chegaram em 4º lugar.

Recorrendo à programação por conjuntos de resposta, deverá produzir parte de um programa, para o CLINGO, que permita encontrar a ordem de chegada. Considere o seguinte programa, capturando alguma da informação enunciada:

```

atleta(chemlany) .      atleta(maiyo) .      atleta(nebebew) .      atleta(kiptum) .
atleta(shiferaw) .      atleta(wanjiku) .      ordem(1..6) .
1{class(A,O):ordem(O)}1:- atleta(A) .
    
```

- a) Quantos modelos estáveis (conjuntos de resposta) são obtidos com o programa anterior? Indique, sumariamente, como obteve esse valor.
- b) Para cada uma das seguintes restrições de integridade, indique se é ou não necessário adicioná-la ao programa, explicando porquê.
 - i. :- atleta(A1), atleta(A2), ordem(O), A1!=A2, class(A1,O), class(A2,O).
 - ii. :- atleta(A), ordem(O1), ordem(O2), O1!=O2, class(A,O1), class(A,O2).
 - iii. :- atleta(A), ordem(O), not class(A,O).
- c) Especifique as regras/restrições necessárias para capturar as pistas 1 a 7 do enunciado.
- d) Escreva um programa em lógica normal (i.e. sem recorrer à notação com chavetas do CLINGO) que tenha os seguintes modelos estáveis: {a} e {a, b}.

XX

II) [5val] Considere os seguintes atributos e respectivos valores possíveis:

$$x_1 \in \{A, B, C\} \quad x_2 \in \{\$, \diamond, \diamondsuit\} \quad x_3 \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

e o seguinte conjunto de 15 exemplos a ser usados na construção de uma árvore de decisão usando o algoritmo DTL.

	x_1	x_2	x_3	Classe
D ₁	A	♦	α	-
D ₂	A	◇	β	-
D ₃	A	♦	β	-
D ₄	B	♦	α	-
D ₅	B	♦	α	-

	x_1	x_2	x_3	Classe
D ₆	B	♦	α	-
D ₇	B	◇	β	-
D ₈	C	◇	β	-
D ₉	B	♦	β	-
D ₁₀	A	♦	α	+

	x_1	x_2	x_3	Classe
D ₁₁	A	♦	α	+
D ₁₂	B	◇	α	+
D ₁₃	B	§	α	+
D ₁₄	B	§	α	+
D ₁₅	C	◇	α	+

- a) Qual o ganho de informação (IG) de cada um dos 3 atributos? Apresente os cálculos. Os seguintes valores de entropia poderão ajudar:

x	y	$H\left(\frac{x}{y}, 1 - \frac{x}{y}\right)$
1	1	0,00
1	2	1,00
1	3	0,92

x	y	$H\left(\frac{x}{y}, 1 - \frac{x}{y}\right)$
1	4	0,81
1	5	0,72
1	6	0,65

x	y	$H\left(\frac{x}{y}, 1 - \frac{x}{y}\right)$
1	7	0,59
1	8	0,54
2	5	0,97

x	y	$H\left(\frac{x}{y}, 1 - \frac{x}{y}\right)$
2	7	0,86
3	7	0,99
3	8	0,95

- b) Qual o atributo a ser escolhido como raiz da árvore? Justifique. Se necessário, desempate a favor do atributo de menor índice (e.g. x_2 vence sobre x_3).
- c) Apresente a árvore de decisão induzida pelo algoritmo DTL. Justifique apresentando os cálculos efectuados.
- d) Como é que a sua árvore de decisão classificaria o seguinte exemplo?

	x_1	x_2	x_3
D ₁₅	A	◇	γ

III) [3val] Recorra ao método de resolução para demonstrar que a seguinte fórmula é válida:

$$(\neg \forall x P(x)) \Rightarrow (\exists x \neg P(x))$$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

IV) [6val] Cerca de 50% dos equipamentos electrónicos de medição são de baixa qualidade, 10 % de elevada qualidade, podendo os restantes serem considerados de qualidade média. Quando um destes equipamentos tem uma utilização superior à recomendada – que acontece em 30% das vezes – a probabilidade de estar avariado é de 80% no caso de equipamentos de baixa qualidade, 40% no caso de equipamentos de média qualidade, e 20% nos restantes casos. Mesmo quando não ultrapassam a utilização recomendada, 20% dos equipamentos de baixa qualidade e 5% dos de média qualidade estão avariados. Os equipamentos de elevada qualidade nunca avariaram quando a sua utilização está dentro da recomendação. Para verificar se um destes aparelhos está avariado, há um teste, que no entanto não é 100% fiável. De facto, este teste não detecta 10% das avarias existentes, e acusa uma avaria em 5% dos casos em que o equipamento não está avariado.

- Modele a situação anterior com uma rede de Bayes, indicando as variáveis aleatórias, seus domínios, topologia da rede e tabela de probabilidade condicionada.
- Calcule a probabilidade de ter sido detectada uma avaria inexistente num equipamento de baixa qualidade.
- Calcule a probabilidade de um equipamento de elevada qualidade ter tido uma utilização superior à recomendada sabendo que foi detectada uma avaria.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

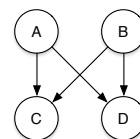
V) [Bónus: até 1val] Para cada frase abaixo, escolha a fórmula em Lógica de Primeira Ordem que melhor a representa.

i. Todas as pessoas gostam de algum jogo. A. $\forall x \forall y \text{ Pessoa}(x) \wedge \text{Jogo}(y) \wedge \text{Gosta}(x, y)$ B. $\forall x \exists y \text{ Pessoa}(x) \wedge \text{Jogo}(y) \wedge \text{Gosta}(x, y)$ C. $\forall x \forall y \text{ Pessoa}(x) \Rightarrow (\text{Jogo}(y) \wedge \text{Gosta}(x, y))$ D. $\forall x \exists y \text{ Pessoa}(x) \Rightarrow (\text{Jogo}(y) \wedge \text{Gosta}(x, y))$	ii. Todos os jogos são divertidos. A. $\forall x \text{ Jogo}(x) \wedge \text{Divertido}(x)$ B. $\forall x \text{ Jogo}(x) \Rightarrow \text{Divertido}(x)$ C. $\exists x \text{ Jogo}(x) \wedge \text{Divertido}(x)$ D. $\exists x \text{ Jogo}(x) \Rightarrow \text{Divertido}(x)$
iii. Para cada jogo, existe alguém que gosta dele. A. $\forall x \exists y \text{ Jogo}(x) \wedge \text{Pessoa}(y) \wedge \text{Gosta}(y, x)$ B. $\forall x \exists y (\text{Jogo}(x) \wedge \text{Pessoa}(y)) \Rightarrow \text{Gosta}(y, x)$ C. $\forall x \exists y \text{ Jogo}(x) \Rightarrow (\text{Pessoa}(y) \wedge \text{Gosta}(y, x))$ D. $\forall x \forall y \text{ Jogo}(x) \wedge \text{Pessoa}(y) \wedge \text{Gosta}(y, x)$	iv. Todas as pessoas gostam de todos os jogos. A. $\forall x \forall y (\text{Pessoa}(x) \wedge \text{Jogo}(y)) \Rightarrow \text{Gosta}(x, y)$ B. $\forall x \forall y \text{ Pessoa}(x) \Rightarrow (\text{Jogo}(y) \wedge \text{Gosta}(x, y))$ C. $\forall x \forall y \text{ Pessoa}(x) \wedge \text{Jogo}(y) \wedge \text{Gosta}(x, y)$ D. $\forall x \exists y (\text{Pessoa}(x) \wedge \text{Jogo}(y)) \Rightarrow \text{Gosta}(x, y)$
v. Existe uma pessoa na FCT que é inteligente. A. $\forall x \text{ Pessoa}(x) \wedge \text{Em}(x, \text{FCT}) \wedge \text{Inteligente}(x)$ B. $\exists x \text{ Pessoa}(x) \wedge \text{Em}(x, \text{FCT}) \wedge \text{Inteligente}(x)$ C. $\forall x (\text{Pessoa}(x) \wedge \text{Em}(x, \text{FCT})) \Rightarrow \text{Inteligente}(x)$ D. $\exists x \text{ Pessoa}(x) \Rightarrow (\text{Em}(x, \text{FCT}) \wedge \text{Inteligente}(x))$	vi. Todas as pessoas na FCT são inteligentes. A. $\forall x \text{ Pessoa}(x) \wedge \text{Em}(x, \text{FCT}) \wedge \text{Inteligente}(x)$ B. $\exists x \text{ Pessoa}(x) \wedge \text{Em}(x, \text{FCT}) \wedge \text{Inteligente}(x)$ C. $\forall x (\text{Pessoa}(x) \wedge \text{Em}(x, \text{FCT})) \Rightarrow \text{Inteligente}(x)$ D. $\exists x \text{ Pessoa}(x) \Rightarrow (\text{Em}(x, \text{FCT}) \wedge \text{Inteligente}(x))$
vii. Alguma pessoa gosta de todos os jogos. A. $\exists x \forall y (\text{Pessoa}(x) \wedge \text{Jogo}(y)) \Rightarrow \text{Gosta}(x, y)$ B. $\exists x \forall y \text{ Pessoa}(x) \Rightarrow \text{Jogo}(y) \wedge \text{Gosta}(x, y)$ C. $\forall x \forall y \text{ Pessoa}(x) \wedge \text{Jogo}(y) \wedge \text{Gosta}(x, y)$ D. $\exists x \forall y \text{ Pessoa}(x) \wedge (\text{Jogo}(y) \Rightarrow \text{Gosta}(x, y))$	viii. Alguma pessoa gosta de algum jogo. A. $\exists x \exists y \text{ Pessoa}(x) \wedge \text{Jogo}(y) \wedge \text{Gosta}(x, y)$ B. $\exists x \exists y (\text{Pessoa}(x) \wedge \text{Jogo}(y)) \Rightarrow \text{Gosta}(x, y)$ C. $\exists x \exists y \text{ Pessoa}(x) \Rightarrow (\text{Jogo}(y) \wedge \text{Gosta}(x, y))$ D. $\forall x \forall y \text{ Pessoa}(x) \wedge \text{Jogo}(y) \wedge \text{Gosta}(x, y)$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

VI) [Bónus: até 1val] Para cada uma das seguintes frases, indique se ela é verdadeira ou falsa em relação à rede de Bayes à direita. (Nota: Apenas terá cotação se classificar corretamente todas as frases)

- A e B são independentes.
- A e C são independentes.
- C e D são independentes.
- A e B são condicionalmente independentes dado C e D.
- A e C são condicionalmente independentes dado B e D.
- C e D são condicionalmente independentes dado A e B.



Nome:

Número:

I.a)

Resposta: 46656.

Justificação: Cada modelo é uma atribuição de uma posição a cada um dos 6 atletas. Logo, o número total de modelos é coincidente com o número de possíveis atribuições i.e. $6^6=46656$.**I.b)** i. Necessária? **SIM**ii. Necessária? **NÃO**iii. Necessária? **NÃO**

Justificações:

i. Esta restrição impede a atribuição da mesma ordem a dois atletas, algo que é desejado e não é impedido pelo programa dado.**ii.** Esta restrição impede a atribuição de mais do que uma ordem a um atleta. Apesar de ser desejado, já é garantido pelo programa dado.**iii.** Esta restrição evita que exista alguma combinação de atleta e ordem tal que esse atleta não tenha essa ordem. Na prática, apenas deixaria de eliminar um hipotético modelo onde todos os atletas tivessem todas as ordens, o que não faz qualquer sentido neste problema.**I.c)**

Pista1:

```
ic1 :- ordem(O;N) , class(nebebew,N) , O>N.
:- not ic1.
```

Pista2:

```
ic2 :- ordem(C;M;N;S;W) , class(wanjiku,W) , class(chemlany,C) ,
      class(shiferaw,S) , class(maiyo,M) , class(nebebew,N) ,
      W<M, W<N, C<M, C<N, S<M, S<N.
:- not ic2.
```

Pista3:

```
ic3 :- ordem(W) , class(wanjiku,W) , W<3.
:- not ic3.
```

Pista4:

```
ic4 :- ordem(K) , class(kiptum,K) , K<=4.
:- not ic4.
```

Pista5:

```
:- ordem(S) , class(shiferaw,S) , S>=2, S<=3.
```

Pista6:

```
ic6 :- ordem(O) , class(chemlany,O) , class(maiyo,O+3) .
:- not ic6.
```

Pista7:

```
:- class(shiferaw,4) .
:- class(wanjiku,4) .
```

I.d)

Não existe qualquer programa em lógica normal com os modelos estáveis indicados, pois os modelos estáveis de um programa em lógica normal não são comparáveis i.e. se M e N são modelos estáveis de um programa em lógica normal P, então $M \not\subseteq N$.

II.a) $IG(x_1) = 0,007$

$IG(x_2) = 0,215$

$IG(x_3) = 0,323$

Cálculos:

$$IG(x_1) = H\left(\frac{6}{15}, \frac{9}{15}\right) - \left[\frac{5}{15} \cdot H\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) + \frac{8}{15} \cdot H\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) + \frac{2}{15} \cdot H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] = 0,97 - \left(\frac{5}{15} \cdot 0,97 + \frac{8}{15} \cdot 0,95 + \frac{2}{15} \cdot 1 \right) = 0,007$$

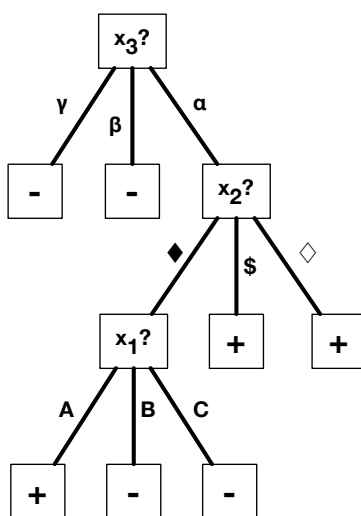
$$IG(x_2) = H\left(\frac{6}{15}, \frac{9}{15}\right) - \left[\frac{8}{15} \cdot H\left(\frac{2}{8}, \frac{6}{8}\right) + \frac{5}{15} \cdot H\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) + \frac{2}{15} \cdot H\left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}\right) \right] = 0,97 - \left(\frac{8}{15} \cdot 0,81 + \frac{5}{15} \cdot 0,97 + \frac{2}{15} \cdot 0 \right) = 0,215$$

$$IG(x_3) = H\left(\frac{6}{15}, \frac{9}{15}\right) - \left[\frac{10}{15} \cdot H\left(\frac{4}{10}, \frac{6}{10}\right) + \frac{5}{15} \cdot H\left(\frac{0}{5}, \frac{5}{5}\right) \right] = 0,97 - \left(\frac{10}{15} \cdot 0,97 + \frac{5}{15} \cdot 0 \right) = 0,323$$

II.b) Atributo: x_3

Justificação: Por ser o atributo que apresenta maior ganho de informação.

II.c) Árvore:



Cálculos (e explicação):

Com $x_3 = \beta$, todos os exemplos são classificados com “-” pelo que o nó é terminal. Com $x_3 = \gamma$, não há exemplos, pelo que o nó é terminal com valor igual à moda do conjunto de exemplos do nó (pai) x_3 i.e. “-”. Com $x_3 = \alpha$ temos os seguintes exemplos (módulo x_3), a serem usados na escolha do atributo (x_1 ou x_2) do próximo nó:

	x_1	x_2	Classe
D_1	A	♦	-
D_4	B	♦	-
D_5	B	♦	-

	x_1	x_2	Classe
D_6	B	♦	-
D_{10}	A	♦	+
D_{11}	A	♦	+

	x_1	x_2	Classe
D_{12}	B	♦	+
D_{13}	B	\$	+
D_{14}	B	\$	+
D_{15}	C	♦	+

$$IG(x_1) = H\left(\frac{6}{10}, \frac{4}{10}\right) - \left[\frac{3}{10} \cdot H\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{6}{10} \cdot H\left(\frac{3}{6}, \frac{3}{6}\right) + \frac{1}{10} \cdot H\left(\frac{1}{1}, \frac{0}{1}\right) \right] = 0,094$$

$$IG(x_2) = H\left(\frac{6}{10}, \frac{4}{10}\right) - \left[\frac{6}{10} \cdot H\left(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right) + \frac{2}{10} \cdot H\left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}\right) + \frac{2}{10} \cdot H\left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}\right) \right] = 0,418$$

Escolhe-se x_2 , por ter maior ganho de informação. Com $x_2 = \$$ e $x_2 = \diamond$ todos os exemplos são classificados com “+” pelo que são nós terminais. No caso de $x_2 = \diamond$, é necessário testar o último atributo, x_1 . Nesse teste, no caso de $x_1 = A$, nem todos os exemplos concordam, mas como não há mais atributos, o nó é terminal com valor igual à moda i.e. “+”. Com $x_1 = B$ todos os exemplos são classificados com “-” pelo que o nó é terminal. Com $x_1 = C$ não há exemplos pelo que o nó é terminal com valor igual à moda do conjunto de exemplos do nó (pai) x_2 i.e. “-”.

II.d) Classificação: —

III. Transformando a negação da fórmula $(\neg \forall x P(x)) \Rightarrow (\exists x \neg P(x))$ para a forma clausal:

$$\neg ((\neg \forall x P(x)) \Rightarrow (\exists x \neg P(x))) \quad (\text{negação da fórmula})$$

$$\neg (\neg (\neg \forall x P(x)) \vee (\exists x \neg P(x))) \quad (\text{eliminar bicondicionais e implicações})$$

$$(\exists x \neg P(x)) \wedge (\forall x P(x)) \quad (\text{deslocar } \neg \text{ para dentro})$$

$$\exists y \neg P(y) \wedge \forall x P(x) \quad (\text{standardizar variáveis})$$

$$\neg P(a) \wedge \forall x P(x) \quad (\text{skolemizar})$$

$$\neg P(a) \wedge P(x) \quad (\text{remover quantificadores universais})$$

Obtemos as seguintes cláusulas:

$$1. [\neg P(a)] \quad 2. [P(x)]$$

Prova por resolução:

$$3. [] \quad (\text{res}) \text{ 1. e 2. com } x = a$$

Como derivámos a cláusula vazia, podemos concluir que $(\neg \forall x P(x)) \Rightarrow (\exists x \neg P(x))$ é válida.

Nome:

Número:

Teste: adaadca

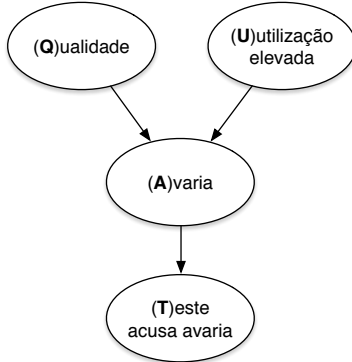
IV.a) Rede e domínios das variáveis

$Q \in \{(e)levada, (m)édia, (b)aixa\}$

$U \in \{(v)erdadeiro, (f)also\}$

$A \in \{(v)erdadeiro, (f)also\}$

$T \in \{(v)erdadeiro, (f)also\}$



Tabelas de probabilidade Condicionada

P(Q=e)	P(Q=m)	P(Q=b)
0,1	0,4	0,5

P(u)	P(¬u)
0,3	0,7

Q	U	P(a Q,U)	P(¬a Q,U)
b	v	0,8	0,2
m	v	0,4	0,6
e	v	0,2	0,8
b	f	0,2	0,8
m	f	0,05	0,95
e	f	0	1

A	P(t A)	P(¬t A)
v	0,9	0,1
f	0,05	0,95

IV.b)

$$\begin{aligned}
 P(Q=b, A=f, T=v) &= P(Q=b, \neg a, t) = \sum_U P(Q=b, \neg a, t, U) = \\
 &= \sum_U P(Q=b) P(U) P(\neg a | Q=b, U) P(t | \neg a) = \\
 &= P(Q=b) P(t | \neg a) \sum_U P(U) P(\neg a | Q=b, U) = \\
 &= 0,5 \cdot 0,05 \cdot [(0,3 \cdot 0,2) + (0,7 \cdot 0,8)] = 0,0155 = 1,55\%
 \end{aligned}$$

Foram aceites respostas que interpretaram a pergunta como incidindo sobre $P(T=v | Q=b, A=f)$

IV.c)

$$P(U=v | Q=e, T=v) = P(u | Q=e, t) = \alpha P(u, Q=e, t) = \alpha \sum_A P(u, Q=e, t, A)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_A P(U, Q=e, t, A) &= \sum_A P(Q=e) \cdot P(U) \cdot P(A | Q=e, U) \cdot P(t | A) = \\
 &= P(Q=e) \cdot P(U) \cdot \sum_A P(A | Q=e, U) \cdot P(t | A)
 \end{aligned}$$

$$U=v: 0,1 \cdot 0,3 \cdot [(0,2 \cdot 0,9) + (0,8 \cdot 0,05)] = 0,0066$$

$$U=f: 0,1 \cdot 0,7 \cdot [(0 \cdot 0,9) + (1 \cdot 0,05)] = 0,0035$$

$$P(u | Q=e, t) = \frac{0,0066}{0,0066 + 0,0035} \approx 0,65347 \approx 65,35\%$$

V.	i. D	ii. B	iii. C	iv. A	v. B	vi. C	vii. D	viii. A
----	------	-------	--------	-------	------	-------	--------	---------

VI.	i. Verdadeira	ii. Falsa	iii. Falsa	iv. Falsa	v. Falsa	vi. Verdadeira
-----	---------------	-----------	------------	-----------	----------	----------------

Não escreva nesta página – não será corrigida.