

Matemática Discreta

2013/14

1.2. Relações Binárias

Isabel Oitavem
Departamento de Matemática
FCT/UNL

*Esta apresentação é um extrato dos slides elaborados por Vítor Hugo Fernandes,
em colaboração com Jorge André, para esta disciplina no ano letivo 2010/2011.*

Definição

Seja X um conjunto. Chamamos **relação binária** sobre X a todo o subconjunto de $X \times X$.

Mais geralmente, uma **relação n -ária** ($n \in \mathbb{N}$) sobre X é um subconjunto de X^n .

Exemplos

- ❶ Seja $X = \{1, 2, 3\}$. O conjunto $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ é uma relação binária sobre X .
- ❷ Sejam $X = \{1, 2, 3, 4\}$. O conjunto $R = \{(x, y) \in X^2 \mid x + y \leq 5\}$ é uma relação binária sobre X .

Notação

Sejam X um conjunto e R uma relação binária sobre X . Dado um par $(x, y) \in X \times X$, escrevemos também **xRy** para designar que $(x, y) \in R$.

Definição

Sejam X e Y dois conjuntos. Uma **relação de X em Y** é um subconjunto de $X \times Y$. (No caso particular em que $X = Y$ temos uma relação binária sobre X .)

Seja R uma relação de X em Y . Chamamos **domínio** de R ao conjunto

$$\text{dom}R = \{x \in X \mid (\exists y \in Y) (x, y) \in R\},$$

e **imagem** de R ao conjunto

$$\text{im}R = \{y \in Y \mid (\exists x \in X) (x, y) \in R\}.$$

A **relação inversa** de R é a relação R^{-1} de Y em X definida por

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

A **relação composta** da relação R de X em Y com a relação S de Y em Z é a relação $S \circ R$ de X em Z definida por

$$S \circ R = \{(x, z) \mid (\exists a \in Y) (x, a) \in R \text{ e } (a, z) \in S\}.$$

Representação de uma relação binária

Seja R uma relação binária sobre um conjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

- ① Através de uma **matriz de adjacências**:

a matriz de adjacências de R é a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\{0, 1\})$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in R \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin R \end{cases}$$

- ② Através de um **diagrama**:

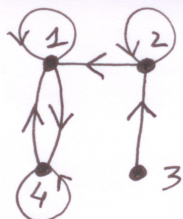
os elementos de X são representados por pontos e dois pontos do diagrama que representam x_i e x_j estão unidos por uma seta, com orientação de x_i para x_j , se $(x_i, x_j) \in R$.

Exemplo

Sejam $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 1), (4, 4)\}$. A matriz das adjacências de R (considerando $x_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$) é a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e



é um diagrama que representa R .

Definição

Dizemos que uma relação binária R sobre X é:

- **reflexiva** se $(\forall x \in X) xRx$;
- **irreflexiva** se $(\forall x \in X) (x, x) \notin R$;
- **simétrica** se $(\forall x, y \in X) xRy \Rightarrow yRx$;
- **anti-simétrica** se $(\forall x, y \in X) xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$;
- **transitiva** se $(\forall x, y, z \in X) xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Definição

Uma relação binária reflexiva, simétrica e transitiva diz-se uma **relação de equivalência**.

Exemplos

- Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. A relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (4, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$ não é uma relação de equivalência.

- A relação R definida em $\mathbb{R}$ por, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2,$$

é uma relação de equivalência.

- Em $\mathbb{Z}$ a relação $\sim$ definida por, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$m \sim n \Leftrightarrow |m| = |n|,$$

é uma relação de equivalência

- Sejam X um conjunto e $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Então Δ é uma relação de equivalência sobre X (denominada **relação identidade** sobre X).
- Sejam X um conjunto e $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$. Então Ω é uma relação de equivalência sobre X (denominada **relação universal** sobre X).
- Para cada $x \in \mathbb{R}$, denotemos por $\lfloor x \rfloor$ o maior número inteiro y tal que $y \leq x$ (parte inteira de x). A relação $\sim$ definida em $\mathbb{R}$ por, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \sim y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor,$$

é uma relação de equivalência.