Probabilidades e Estatística E [1]

[1] Última actualização a 28 de Fevereiro de 2018

Programa

1. Introdução à Teoria das Probabilidades
2. Variáveis aleatórias e suas distribuições de probabilidade
   (a) Definição de variável aleatória;
   (b) Momentos de variáveis aleatórias;
   (c) Algumas distribuições importantes
   (d) Vectores aleatórios
3. Teorema Limite Central
4. Estimação pontual
5. Estimação por intervalo de confiança
6. Testes de hipóteses
7. Regressão linear simples

Página da disciplina:

https://clip.unl.pt/

- Programa
- Regras de avaliação
- Horário de atendimento
- Horário das aulas
- Documentação de apoio

Número de maneiras diferentes de escolher k elementos, de um conjunto de n elementos:

		Há **repetição**? Sim	Há **repetição**? Não
Interessa a **ordem**?	Sim	Arranjos com rep.: ${}^{n}A'_k = n^k$	Arranjos: ${}^{n}A_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
	Não	Comb. com rep. ${}^{n}C'_k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$	Combinações ${}^{n}C_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Sejam $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ conjuntos com n e m elementos distintos, respectivamente.

Produto cartesiano:

Designa-se por **produto cartesiano** o conjunto de pares (a_i, b_j) em que o primeiro elemento provém de A e o segundo de B e representa-se por $A \times B$.

O número de elementos de $A \times B$ é

$$\boxed{\#(A \times B) = n \times m.}$$

1. Os escritórios de uma empresa estão equipados com telefones funcionando internamente como extensões identificadas por uma sequência de 3 algarismos, dos quais o primeiro não é zero. Quantos telefones podem ser identificados?

4. Um centro comercial tem 8 portas. De quantas maneiras distintas se pode
   (a) entrar e sair do centro comercial?
   (b) entrar por uma porta e sair por outra?

7. Quatro livros de Matemática, seis de Física e dois de Química, todos diferentes, devem ser arrumados numa prateleira. Quantas arrumações diferentes são possíveis, se:
   (a) os livros de cada matéria ficarem todos juntos?
   (b) apenas os livros de Matemática ficarem juntos?

9. Vinte e cinco membros de uma sociedade devem eleger um presidente, um secretário e um tesoureiro. Supondo que qualquer um dos vinte e cinco membros é elegível para qualquer dos cargos, quantas são as hipóteses distintas de eleição?

15. De quantas maneiras distintas se poderá formar uma comissão, com três elementos escolhidos de entre os vinte e cinco membros de uma sociedade?

Definição (Experiência aleatória)

Uma **experiência aleatória** *é uma experiência na qual:*

- *todos os possíveis resultados da experiência são conhecidos à partida;*
- *para qualquer realização da experiência não se sabe, antes desta ocorrer, qual dos seus possíveis resultados vai acontecer;*
- *a experiência pode sempre ser repetida sob idênticas condições.*

Exemplos:

- resultado do lançamento de uma moeda ao ar (assumindo que não "aterra" de lado!);
- nº de *pintas* após o lançamento de um dado;
- o tempo de vida de uma lâmpada;
- Chave do Euromilhões.

Definição (Espaço de resultados ou universo)

Chamamos **espaço de resultados** *ou* **universo**, *e representamos por* Ω, *ao conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória.*

Exemplos:

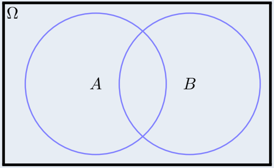
- resultado do lançamento de uma moeda ao ar (assumindo que não "aterra" de lado!). $\Omega = \{\text{Cara, Coroa}\}$;
- nº de *pintas* após o lançamento de um dado. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- o tempo de vida de uma lâmpada. $\Omega = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$;

Definição (Acontecimento)

Um **acontecimento** *é um subconjunto do espaço de resultados,* Ω.

Definição (Diagrama de Venn)

Representação gráfica do espaço de resultados (rectângulo) e de acontecimentos (círculos). No seguinte exemplo, o diagrama apresenta o espaço de resultados (Ω) e dois acontecimentos (A e B).



Notas:

- Cada acontecimento formado por apenas um ponto amostral é designado por **acontecimento simples** ou **elementar**.
- Ao conjunto $\varnothing$ chamamos **acontecimento impossível**
- Ao conjunto Ω chamamos **acontecimento certo**.

Definição (Sub-acontecimento)

A *é* **sub-acontecimento** *de* B*, e escreve-se* $A \subset B$*, se e só se a realização de* A *implica a realização de* B*.*

Definição (Acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos)

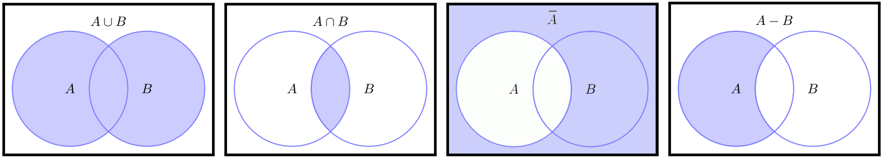
Se $A \cap B = \varnothing$*, dizemos que os acontecimentos* A *e* B *são* **disjuntos** *ou* **mutuamente exclusivos***.*

Principais Operações:

Podemos aplicar as operações usuais sobre conjuntos de modo a obter outros acontecimentos de interesse. As operações mais usuais são:

- A **união** de dois acontecimentos A e B, $A \cup B$;
- A **intersecção** de dois acontecimentos A e B, $A \cap B$;
- O **complementar** do acontecimento A, $\overline{A}$;
- A **diferença** dos acontecimentos A e B, $A - B$ $(= A \cap \overline{B})$;

Diagramas de Venn das principais operações:



Propriedades importantes:

- $A \cup B = B \cup A$ (Prop. comutativa)
  $A \cap B = B \cap A$ (Prop. comutativa)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Prop. associativa)
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Prop. associativa)
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (Prop. distributiva)
  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Prop. distributiva)
- $\overline{\overline{A}} = A$ (dupla negação)
- $(A \cup A) = (A \cap A) = A$ (idempotência)
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (Leis de De Morgan)
  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (Leis de De Morgan)

Definição (Definição clássica, ou de Laplace, de Probabilidade)

Se uma experiência aleatória tem a si associado um número finito N *de resultados, mutuamente exclusivos e igualmente prováveis, então a probabilidade de qualquer acontecimento* A, $P(A)$, *é dada por:*

$$\boxed{P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{n^o \text{ de resultados favoráveis a } A}{n^o \text{ de resultados possíveis}}.}$$

Exercício 1: Considere a experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado e registo do número de pontos da face virada para cima. Definam-se os acontecimentos:

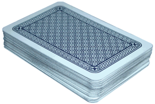
A - O número é menor que 3;

B - O número é par.

Determine a probabilidade de:

- Ocorrer pelo menos um dos acontecimentos;
- Ocorrer A e B;
- Ocorrer A mas não B;
- Não ocorrer A.

Exercício 2: Retiramos ao acaso cinco cartas de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de obtermos os quatros ases?



Solução: Ex1: 2/3, 1/6, 1/6, 2/3. Ex.2: 48/2598960

Definição (Definição frequencista de Probabilidade)

$P(A)$ é avaliada a partir de informação existente sobre A, sendo dada pelo limite da frequência relativa com que se observou A, isto é,

$$\boxed{P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n},}$$

onde n_A representa o número de observações de A e n o número de realizações da experiência aleatória.

Para valores elevados de n, $P(A) \approx \dfrac{n_A}{n}$.

Definição (Definição subjectiva de Probabilidade)

$P(A)$ resulta da avaliação de um especialista no assunto.

Definição (Definição Axiomática de Probabilidade)

Seja $\mathcal{A}$ uma família de acontecimentos, fechada para as operações usuais. A Probabilidade é uma função cujo domínio é $\mathcal{A}$ e que verifica as seguintes condições ou axiomas:

1. $P(A) \geq 0$, *qualquer que seja o acontecimento* $A \in \mathcal{A}$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. *Se* A *e* B *são acontecimentos disjuntos, isto é, se* $A \cap B = \emptyset$ *então* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Esta axiomática não contempla situações em que temos de considerar uma infinidade de acontecimentos. É usual substituir $\boxed{\mathbf{3}}$ por

3. Se A_1, A_2,... são acontecimentos disjuntos dois a dois, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Sejam A e B dois acontecimentos. Então são consequências imediatas dos axiomas os seguintes resultados:

1. $P(\varnothing) = 0$;
2. Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$;
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
4. $P(A) \in [0, 1]$;
5. $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$;
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

7. Dados os acontecimentos A_i, $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) =& P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{i \neq j} P\left(A_i \cap A_j\right) \\ &\quad + \sum_{i \neq j \neq k} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) \end{aligned}$$

Definição (Acontecimentos incompatíveis)

Dois **acontecimentos** A *e* B *dizem-se* **incompatíveis** *se*

$$P\left(A \cap B\right) = 0.$$

Realizou-se um ensaio clínico para testar um novo medicamento. Escolheram-se 200 doentes com a mesma doença. 100 desses doentes foram tratados com o novo medicamento e os restantes 100 com o medicamento convencional. Os resultados foram os seguintes:

	Melhorou (M)	Não melhorou ($\overline{M}$)	
Medicamento experimental (E)	69	31	100
Medicamento convencional ($\overline{E}$)	58	42	100
	127	73	200

1. Qual a probabilidade de um doente, escolhido ao acaso,
   (a) melhorar?
   (b) tomar o medicamento experimental e melhorar?
2. Qual a probabilidade de um doente, que tomou o medicamento experimental, melhorar?

Definição (Probabilidade condicional)

A **probabilidade condicional** *de* A *dado* B *é*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \textit{se} \quad P(B) > 0. \tag{1}$$

Observação: Resulta de (1) o seguinte teorema,

Teorema (Teorema da Probabilidade Composta)

Sejam A e B *dois acontecimentos tais que* $P(B) > 0$. *Então,*

$$P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B).$$

Nalguns casos verifica-se que $\boxed{P(A|B) = P(A)}$, ou seja, o conhecimento da ocorrência de B não afecta a probabilidade de A ocorrer.

Definição (Acontecimentos Independentes)

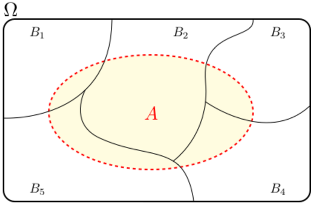
Dois acontecimentos A e B dizem-se **independentes** *se e só se*

$$P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) P\left(B\right).$$

Teorema

Se A e B são acontecimentos independentes, também são independentes A e $\bar{B}$, $\bar{A}$ e B e ainda $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Nota: Dizemos que $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ é uma **partição do espaço de resultados**, Ω, quando $B_i \cap B_j = \varnothing \ (i \neq j)$ e $\cup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$.



Teorema (Teorema da probabilidade total)

Seja $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ *uma* **partição do espaço de resultados** Ω, *com* $P(B_i) > 0, \ \forall i$. *Dado um qualquer acontecimento* A, *tem-se*

$$P(A) = P(A \,|B_1) \, P(B_1) + \ldots + P(A \,|B_n) \, P(B_n)$$

Teorema (Teorema de Bayes)

Seja $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ *uma partição do espaço de resultados* Ω, *com* $P(B_i) > 0,\ \forall i$. *Dado um qualquer acontecimento* A, *com* $P(A) > 0$,

$$P(B_j\,|A) = \frac{P(A\,|B_j)\,P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A\,|B_j)\,P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A\,|B_i)\,P(B_i)}.$$

Exemplo: Teste de PE D - 2007/08

Três máquinas A, B e C **produzem** botões, respectivamente, 15%, 25% e 60% da produção total. As percentagens de botões **defeituosos** fabricados por estas máquinas são respectivamente 5%, 7% e 4%.

Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: Se ao acaso, da produção total de botões, for encontrado um defeituoso, a probabilidade de ele ter sido produzido pela máquina B é de cerca de 36%.

Resolução:
Sejam A, B, C e D os seguintes acontecimentos:
A - Botão produzido pela máquina A; B - Botão produzido pela máquina B;
C - Botão produzido pela máquina C; D - Botão com defeito;

De acordo com o enunciado, $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.25$, $P(C) = 0.6$, $P(D|A) = 0.05$, $P(D|B) = 0.07$ e $P(D|C) = 0.04$.

Usando o **Teorema de Bayes**, $P(B|D) = 175/490 \simeq 36\%$.

Muitos autores apresentam uma definição simples de variável aleatória. No livro Murteira *et al.* (2007)[2] podemos encontrar a seguinte definição:

Definição (Variável aleatória)

Uma variável aleatória, X, é uma função com domínio Ω e com contradomínio em $\mathbb{R}$. Assim,

$$X : \omega \in \Omega \longrightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}.$$

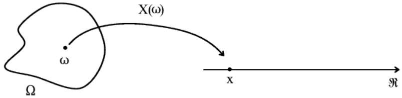


Figura: Imagem obtida em
http://archive.cnx.org/resources/64fd28e79e27bc8f4d43303ca7d6a27ba13d7f9e/Figure2-1.png

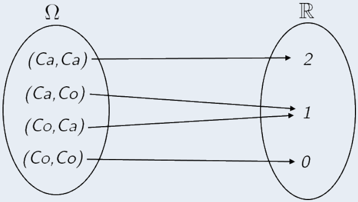
[2] Murteira, B., Ribeiro, C., Silva, J. e Pimenta, C. (2007). Introdução à Estatística, 2ª edição. McGraw-Hill.

Exemplo

Considere a experiência que consiste em lançar 2 moedas equilibradas, e registar as faces que ficam voltadas para cima. O espaço de resultados é

$$\Omega = \{(Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)\}.$$

Podemos, **por exemplo**[3], *atribuir*



[3] Neste exemplo, X = número de caras.

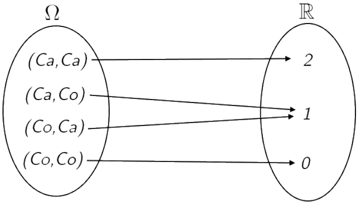
Muitos autores apresentam um definição diferente de variável aleatória. Vamos em breve apresentar essa definição.

Definição

A imagem do **acontecimento** A *por* X *é o conjunto de valores reais:*

$$X(A) = \{X(\omega) : \omega \in A\}.$$

Exemplo:



Se A = {(Ca,Ca), (Ca,Co)}, a imagem de A por X é $\boxed{X(A) = \{1, 2\}}$.

Definição

A imagem inversa de $D \subset \mathbb{R}$ por X é o subconjunto de Ω:

$$X^{-1}(D) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in D\}.$$

Exemplo: Sejam $D_1 = \{0,2\}$, $D_2 =]0,2]$, $D_3 = [3,+\infty[$ e $D_4 =]-\infty,0]$.

Então,

- $X^{-1}(D_1) = \{(Ca,Ca),(Co,Co)\}$;
- $X^{-1}(D_2) = \{(Ca,Ca),(Co,Ca),(Ca,Co)\}$;
- $X^{-1}(D_3) = \varnothing$
- $X^{-1}(D_4) = \{(Co,Co)\}$.

Definição (Variável aleatória)

Uma **variável aleatória** X *(v.a.) é uma aplicação* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que,*

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

é um acontecimento.

Como

$$A_x = X^{-1}(]-\infty; x]) = \begin{cases} \varnothing, & x < 0 \\ \{(Co, Co)\} & 0 \le x < 1 \\ \{(Co, Co), (Ca, Co), (Co, Ca)\} & 1 \le x < 2 \\ \Omega & x \ge 2 \end{cases}$$

é sempre um acontecimento, X é uma variável aleatória.

Exemplo de cálculo de uma probabilidade:

$$P(X=1) = P(X^{-1}(\{1\})) = P(\{(Ca, Co), (Co, Ca)\}) = \frac{1}{2}$$

Proposição

Se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ são m variáveis aleatórias e $h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então

$$Y = h\left(X_1, X_2, \ldots, X_m\right)$$

é uma variável aleatória.

Definição (Função de distribuição)

Define-se **função de distribuição** *da variável aleatória X como:*

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X^{-1}(]-\infty, x])) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriedades da função de distribuição:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
2. F é contínua à direita, isto é, $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$;
3. F é não decrescente, isto é, se $x < y$, $F(x) \leq F(y)$;
4. $P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - F(x^-), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Nota: $F(x^-) = \lim_{t \to x^-} F(t)$.

Considere o conjunto de pontos de descontinuidade de F,

$$D = \{a \in \mathbb{R} : \ P(X = a) > 0\}.$$

Definição (Variável aleatória discreta)

Uma v.a. X *diz-se do* **tipo discreto** *ou simplesmente* **discreta** *se* D *é quanto muito numerável e*

$$P(X \in D) = 1.$$

D *é designado o* **suporte** *de* X.

Definição (Função de probabilidade)

Seja X uma v.a. discreta. Chama-se função de probabilidade (f.p.) de X à função definida pelo conjunto dos valores de D e pelas respectivas probabilidades, isto é, por (x, p_x) onde $x \in D$ e $p_x = P(X = x)$.

Propriedades da função de probabilidade:

1. $P(X = x) > 0, \quad \forall x \in D$;
2. $\displaystyle\sum_{x \in D} P(X = x) = 1$.

Cálculo de probabilidades:

$$\boxed{P\left(X \in I\right) = P\left(X \in D \cap I\right) = \sum_{x \in (D \cap I)} P(X = x), \quad \text{para qualquer } I \subseteq \mathbb{R}.}$$

Considere a v.a. X com função de probabilidade. A função de probabilidade pode ser apresentada de várias formas distintas:

1

$$X \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{array} \right.$$

2

$$P(X=x) = \begin{cases} 0.25, & x = 0, 2 \\ 0.5, & x = 1 \\ 0, & \text{outros valores de } x. \end{cases}$$

3

$$P(X=x) = \binom{2}{x} 0.25, \quad x = 0, 1, 2$$

- Seja X uma v.a. **discreta** com suporte D_X e g uma função real de variável real, cujo domínio contém D_X.
- Então $Y = g(X)$ é também uma variável aleatória.
- O suporte de Y é $D_Y = g(D_X)$.
- A função de probabilidade de Y é

$$P(Y = y) = P(X \in A_y) = \sum_{x \in A_y} P(X = x), \qquad \forall y \in D_Y,$$

onde $A_y = \{x \in D_X : g(x) = y\}$.

Exemplo: Considere a v.a. X com função de probabilidade

$$X \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{array} \right.$$

e seja $Y = (X-1)^2$. É fácil de verificar que $D_Y = \{0, 1\}$ e

$$P(Y = 0) = P(X = 1) = 0.5$$
$$P(Y = 1) = P(X = 0 \vee X = 2) = P(X = 0) + P(X = 2) = 0.5$$

Definição (Parâmetro)

Corresponde a uma característica numérica da variável aleatória. Pode ser, por exemplo, uma constante presente na expressão analítica da função de probabilidade, função densidade ou função de distribuição.

Definição (Momentos)

São parâmetros importantes que caracterizam a variável aleatória. São usados para avaliar, por exemplo, a localização, dispersão ou assimetria da variável aleatória.

Definição (Valor médio)

O **valor médio** *ou* **valor esperado** *ou* **média** *de uma v.a.* X *é:*

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in D} x P(X = x) & \text{se } X \text{ é uma v.a. } \textbf{discreta} \\ & \text{com suporte } D; \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & \text{se } X \text{ é uma v.a. } \textbf{contínua}, \end{cases}$$

se o somatório ou o integral for absolutamente convergente.

Observações:

- O **valor médio** não é necessariamente um valor observável de X;
- Se considerarmos a distribuição de probabilidade correspondendo à massa de um corpo, a média corresponde ao seu centro de gravidade;
- É uma medida (ou parâmetro) de **localização** de X.

1. Considere a v.a. X com função de probabilidade

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{cases}$$

Então, o **valor médio** de X é

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) = 1$$

2. Considere a v.a. X com função de probabilidade

$$X \begin{cases} 0 & 2 & 4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{cases}$$

O **valor médio** de X é

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0 \times P(X = 0) + 2 \times P(X = 2) + 4 \times P(X = 4) = \\ &= 0 + 1 + 0.8 = 1.8 \end{aligned}$$

Definição

Seja X uma v.a. e g uma função real. Então o **valor médio** *de $g(X)$ é:*

$$\mathrm{E}(g(X)) = \begin{cases} \sum_{x \in D} g(x)P(X = x) & \text{se } X \text{ é uma v.a. } \textbf{discreta}; \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx & \text{se } X \text{ é uma v.a. } \textbf{contínua}; \end{cases}$$

Observações:

- O valor médio só está definido se o somatório/integral for absolutamente convergente;
- A existência de $E(X)$ não implica a existência de $E(g(X))$.

Considere a v.a. X com função de probabilidade

$$X\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{array}\right.$$

- o **valor médio** de $g(X) = X^2$ é

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= 0^2 \times P(X=0) + 2^2 \times P(X=2) + 4^2 \times P(X=4) = \\ &= 0 \times 0.3 + 4 \times 0.5 + 16 \times 0.2 = 5.2 \end{aligned}$$

- o **valor médio** de $g(X) = \ln(1+X)$ é

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\ln(1+X)) &= \ln(1+0)P(X=0) + \ln(1+2)P(X=2) + \ln(1+4)P(X=4) = \\ &= 0.871 \end{aligned}$$

- o **valor médio** de $g(X) = \frac{X-4}{2}$ é

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\tfrac{X-4}{2}\right) &= \tfrac{0-4}{2} \times P(X=0) + \tfrac{2-4}{2} \times P(X=2) + \tfrac{4-4}{2} \times P(X=4) = \\ &= -2 \times 0.3 - 1 \times 0.5 + 0 \times 0.2 = -0.6 - 0.5 = -1.1 \end{aligned}$$

Proposição

Sejam X e Y variáveis aleatórias, a e b, constantes reais. Então:

- $\mathrm{E}(a) = a$;
- $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$;
- $\mathrm{E}(X \pm Y) = \mathrm{E}(X) \pm \mathrm{E}(Y)$;
- $\mathrm{E}\left(g(X) \pm h(Y)\right) = \mathrm{E}\left(g(X)\right) \pm \mathrm{E}\left(h(Y)\right)$

Exemplo: o **valor médio** de $g(X) = \frac{X-4}{2}$ é

$$\mathrm{E}\left(\frac{X-4}{2}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}X - 2\right) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X) - 2$$

Definição (Variância e desvio padrão)

Seja X uma v.a. com valor médio μ. Define-se a **variância** *de X por*

$$\sigma^2 = \mathrm{V}(X) = \mathrm{E}((X - \mu)^2).$$

A $\sigma = \sqrt{V(X)}$ chamamos **desvio padrão** *da v.a. X.*

Exemplo: Considere a v.a. X com função de probabilidade

$$X \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{array} \right.$$

A variância de X é

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= (0 - 1.8)^2 \times P(X = 0) + (2 - 1.8)^2 \times P(X = 2) + (4 - 1.8)^2 \times P(X = 4) = \\ &= (0 - 1.8)^2 \times 0.3 + (2 - 1.8)^2 \times 0.5 + (4 - 1.8)^2 \times 0.2 = 1.96 \end{aligned}$$

O desvio padrão de X é $\sigma = \sqrt{1.96} = 1.4$

Proposição

Seja X é uma v.a., para a qual $V(X) < \infty$. Então,

$$V(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}^2(X).$$

Exemplo: Considere a v.a. X com função de probabilidade

$$X \begin{cases} 0 & 2 & 4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{cases}$$

A variância de X é $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}^2(X) = 5.2 - 1.8^2 = 1.96$

Proposição

Seja X uma variável aleatória, a e b, constantes reais. Então:

- $\mathrm{V}(a) = 0$;
- $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$;

Definição (Coeficiente de variação)

O Coeficiente de variação de X, com suporte positivo é, $\mathrm{CV} = \frac{\sigma}{\mu}$.

Definição (Moda)

A Moda, representada por mo, é o valor que maximiza a função de probabilidade ou a função densidade de probabilidade, desde que seja único.

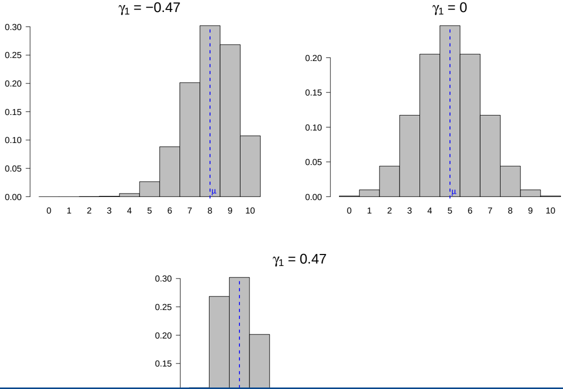
Exemplo: Considere a v.a. X com função de probabilidade

$$X \begin{cases} 0 & 2 & 4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{cases}$$

O Coeficiente de variação de X é $\mathrm{CV}\,(X) = \sqrt{1.96}/1.8 = 7/9 = 0.778$ e a moda é 2.

Definição (Coeficiente de assimetria)

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{E}((X-\mu)^3)}{\sigma^3}.$$



Definição (Coeficiente de achatamento ou kurtosis:)

$$\gamma_2 = \frac{\mathrm{E}((X-\mu)^4)}{\sigma^4}.$$

Nota: *A* $\gamma_2 - 3$ *chamamos* **excesso de kurtosis**.

Exemplo: Considere a v.a. X com função de probabilidade

$$X \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{array} \right.$$

Temos

$$\mathrm{E}((X-1.8)^3) = 0.384, \qquad \mathrm{E}((X-1.8)^4) = 7.8352,$$
$$\gamma_1 = 0.1399 \qquad \gamma_2 = 2.0396$$

Nota: Podemos também calcular o numerador da fórmula de γ_1 e γ_2 usando os resultados $E((X-\mu)^3) = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$, $E((X-\mu)^4) = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 2\mu^3 + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4$

Par aleatório

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_p$ p variáveis aleatórias. Então $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ é um vector aleatório de dimensão p. Vamos restringir-nos apenas aos vectores aleatórios com dois elementos ($p = 2$), ditos **pares aleatórios**, representados por (X, Y).

Definição (Par aleatório discreto)

(X, Y) *é um* **par aleatório discreto** *se e só se* X *e* Y *são variáveis aleatórias discretas.*

Então, o conjunto (suporte)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(X = x, Y = y) > 0\}$$

é, quando muito, numerável e $P((X, Y) \in D) = 1$.

Par aleatório

Definição (Função de probabilidade conjunta)

Seja (X, Y) *um* **par aleatório discreto** *tomando valores no conjunto*

$$D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; P(X = x, Y = y) > 0 \,\}.$$

Chamamos **função de probabilidade conjunta** *(f.p.c.) de* (X, Y) *à função:*

$$P(X = x, Y = y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Propriedades da função de probabilidade conjunta:

- $0 \leq P(X = x, Y = y) \leq 1, \quad \forall (x, y)$
- $\sum \sum_{(x,y)\in D} P(X = x, Y = y) = 1$

Exercício: verifique se

$$P(X = x, Y = y) = \frac{x + 2y}{24}, \quad x = -1, 1, \quad y = 1, 2, 3,$$

é uma função de probabilidade.

Observação: Quando o conjunto D é finito e tem dimensão pequena, podemos representar a função de probabilidade conjunta (f.p.c.) numa tabela.

Exemplo: Seja (X, Y) um par aleatório discreto com a seguinte f.p.c.:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/4 $= P(X = 0, Y = 0)$	1/8 $= P(X = 0, Y = 1)$	0 $= P(X = 0, Y = 2)$
1	1/8 $= P(X = 1, Y = 0)$	1/8 $= P(X = 1, Y = 1)$	1/8 $= P(X = 1, Y = 2)$
2	0 $= P(X = 2, Y = 0)$	0 $= P(X = 2, Y = 1)$	1/4 $= P(X = 2, Y = 2)$

Cálculo de probabilidades: Para qualquer $I \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{P\left((X,Y) \in I\right) = P\left((X,Y) \in (D \cap I)\right) = \sum\sum_{(x,y)\in(D\cap I)} P(X = x, Y = y).}$$

Definição (função de probabilidade marginal)

Dado um par aleatório discreto (X,Y), definimos a **função de probabilidade marginal de** X *como*

$$P\left(X = x\right) = \sum_{y} P\left(X = x, Y = y\right),$$

e a **função de probabilidade marginal de** Y *como*

$$P\left(Y = y\right) = \sum_{x} P\left(X = x, Y = y\right).$$

Nota: *Nos somatórios anteriores, basta considerar valores x e y tais que $(x,y) \in D$.*

Definição (Função de probabilidade condicional de X dado $Y = y$ (fixo))

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \quad \textit{se} \quad P(Y = y) > 0.$$

De modo análogo, podemos definir a **função de probabilidade condicional** de Y dado $X = x$.

Definição (Independência entre v.a.'s discretas)

As v.a.'s X e Y dizem-se **independentes** *se e só se,*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y), \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nota: É suficiente verificar a definição anterior para qualquer $(x, y) \in D$.

Exemplo: Seja (X, Y) um par aleatório discreto com a seguinte f.p.c.:

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	1/4	1/8	0	3/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
2	0	0	1/4	1/4
	3/8	1/4	3/8	

1. Qual a probabilidade de X ser maior que Y?
2. Calcule $P(X \leq 1,\, Y > 0)$.
3. Determine a função de probabilidade de $X|Y=2$ e calcule $E(X|Y=2)$.
4. X e Y são v.a.'s independentes? Justifique a sua resposta.

Definição

Seja (X, Y) *um par aleatório e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função. Define-se o* **valor médio** *ou* **valor esperado** *ou* **média** *de* $g(X, Y)$ *como:*

$$E(g(X,Y)) = \begin{cases} \displaystyle\sum\sum_{(x,y)\in D} g(x,y)P(X=x, Y=y) & \text{se } X \text{ e } Y \text{ são v.a.'s discretas;} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy & \text{se } X \text{ e } Y \text{ são v.a.'s contínuas;} \end{cases}$$

Definição (Covariância)

Seja (X, Y) *um par aleatório. Define-se* **covariância** *entre* X *e* Y *por:*

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X))\,(Y - \mathrm{E}(Y))\right],$$

Proposição

Caso exista a $\mathrm{Cov}(X, Y)$*, esta pode ser calculada através da fórmula:*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$$

Proposição

Se X *e* Y *são* **independentes**, $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ *e* $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Interpretação da Covariância

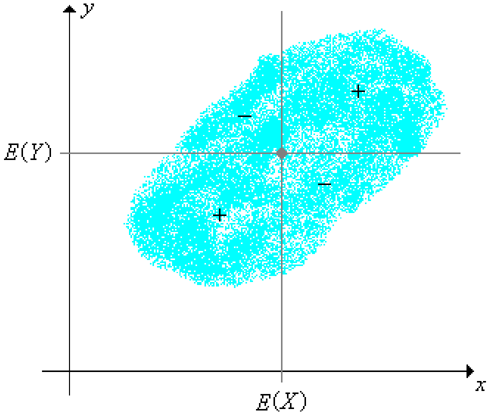


Figura: Fonte: http://www.math.uah.edu/stat/expect/Covariance.png

Proposição

Sejam X, Y e Z v.a.'s, a e b, constantes reais. Então:

- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$;
- $\text{Cov}(X, X) = V(X)$;
- $\text{Cov}\,(X + Y, Z) = \text{Cov}\,(X, Z) + \text{Cov}\,(Y, Z)$;
- $\text{Cov}\,(aX + b, Y) = a\text{Cov}\,(X, Y)$.

Teorema

Sejam X e Y variáveis aleatórias. Então,

$$\mathrm{V}(X \pm Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$$

Definição (Coeficiente de correlação)

Define-se o **coeficiente de correlação** *de* (X, Y) *por*

$$\rho\,(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{V}\,(X)\,\mathrm{V}\,(Y)}}.$$

Propriedades:

- $-1 \leq \rho\,(X, Y) \leq 1$;
- $|\rho\,(X, Y)| = 1$ se e só se $P\,(Y = a + bX) = 1$, sendo a e b constantes reais;
- Se X e Y são v.a.'s **independentes**, $\rho(X, Y) = 0$.

Interpretação da Correlação

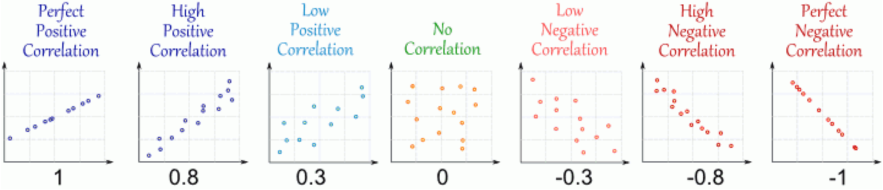


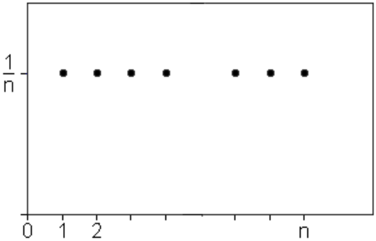
Figura: Fonte: https://www.mathsisfun.com/data/images/correlation-levels.gif

Observação: Como regra empírica, podemos considerar que existe forte relação linear positiva (negativa) entre X e Y se $\rho(X,Y) \geq 0.7$ ($\rho(X,Y) \leq -0.7$).

Definição (Distribuição uniforme discreta)

Dizemos que a variável aleatória X segue uma distribuição **Uniforme Discreta** *de parâmetro n e escrevemos $X \sim Unif(n)$ ou $X \sim U(n)$, se a função de probabilidade de X é dada por:*

$$X \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{array} \right. \qquad ou \qquad P(X = x) = \frac{1}{n}\,, \quad x = 1, \dots, n.$$



Distribuição Uniforme Discreta

Proposição

Seja a v.a. $X \sim U(n)$*. Então,*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{k}{n}, & k \leq x < k+1, \quad k = 1, \ldots, n-1 \\ 1, & x \geq n \end{cases}.$$

Proposição

Seja a v.a. $X \sim U(n)$*. Então,*

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Exercício: Seja X a variável aleatória que representa o número de pontos que saem no lançamento de um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Temos então, $X \sim U(6)$;

Determine,

- $E(X)$ e $V(X)$;
- o coeficiente de assimetria;
- a probabilidade de sair um número maior ou igual a 5.

Solução: $E(X) = 7/2 = 3.5$, $V(X) = (6^2 - 1)/12 = 35/12$, $\gamma_1 = 0$, $P(X \geq 5) = 2/6 = 1/3$,

Exemplo:

- Num aquário existem 9 peixes, dos quais 5 estão **saudáveis** (S) e os restantes 4 estão **doentes** (D).
- Considere a experiência aleatória: **extracção ao acaso e sem reposição de 3 peixes e registo do seu estado de saúde**.
- Associada a esta experiência aleatória, considere a variável aleatória

  X - número de peixes saudáveis na amostra extraída de 3 peixes.

Determine a função de probabilidade de X.

Definição (Distribuição Hipergeométrica)

Considere:

- *uma população com* N *elementos;*
- M *elementos possuem determinada característica e os restantes* $(N-M)$ *não a possuem (***dicotomia***);*
- *a experiência aleatória que consiste em seleccionar ao acaso e* **sem reposição** n *elementos (amostra).*

Considere a v.a. X *- nº de elementos com a característica, na amostra seleccionada sem reposição. Esta v.a.* X *tem função de probabilidade,*

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad max(0, M+n-N) \leq k \leq min(M, n).$$

e diz-se ter distribuição **Hipergeométrica** *de parâmetros* (N, M, n) *e usamos a notação* $X \sim H(N, M, n)$*.*

Observação: Considere a v.a. $X \sim \mathrm{H}(N, M, n)$. Então:

$$E(X) = n\frac{M}{N}; \qquad V(X) = n\frac{M}{N^2(N-1)}(N-M)(N-n);$$

Definição (Prova de Bernoulli)

Experiência aleatória com dois possíveis resultados ("Sucesso" ou "Insucesso").

Definição (Distribuição de Bernoulli)

Seja X a v.a. que toma o valor 1 *se o resultado da experiência é "Sucesso" e* 0 *se é "Insucesso", traduzindo a* **dicotomia** *dos resultados. Denotando* $p = P(\text{"}Sucesso\text{"}) > 0$, *a função de probabilidade de* X *é:*

$$X \begin{cases} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{cases}, \qquad 0 < p < 1$$

Dizemos que X *segue uma distribuição de* **Bernoulli** *de parâmetro* p *e escrevemos* $X \sim Ber(p)$.

Proposição

Seja a v.a. $X \sim Ber(p)$. *Então:* $E(X) = p$ *e* $V(X) = p(1-p)$.

Exercício: Num determinado percurso de avião, a probabilidade de uma pessoa qualquer que aí viaje pedir uma refeição vegetariana é de 0.2. Supondo que em determinado dia viajam 10 pessoas no avião, calcule a probabilidade de:

(a) Ninguém pedir refeição vegetariana.

(b) Todos pedirem refeição vegetariana.

(c) Pelo menos uma pedir refeição vegetariana.

(d) Duas pessoas pedirem a refeição vegetariana.

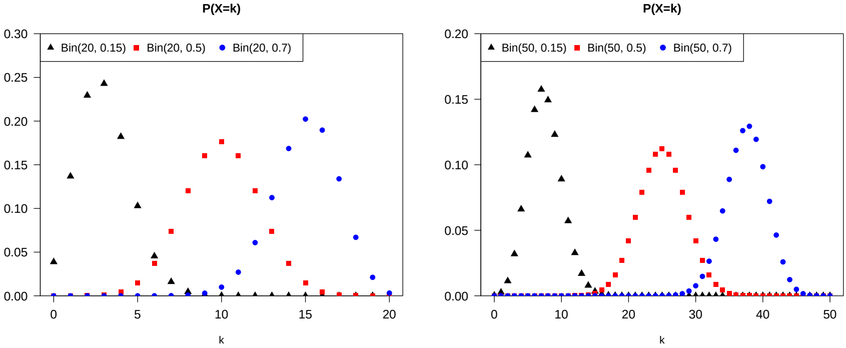
Definição (Distribuição Binomial)

Considere uma sucessão de provas de Bernoulli independentes, onde em cada prova a probabilidade de "sucesso", p, é constante. A v.a.

$$X = \text{"número de sucessos em } n \text{ provas de Bernoulli"}$$

segue uma distribuição **Binomial** *de parâmetros n e p, e escrevemos $X \sim B(n, p)$. A função de probabilidade é:*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \qquad 0 < p < 1$$



Proposição

Considere a v.a. $X \sim B(n, p)$. *Então,*

$$E(X) = np \qquad \text{e} \qquad V(X) = np(1-p);$$

Teorema (Propriedade aditiva da distribuição Binomial)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_m$, m *v.a.'s independentes tais que* $X_i \sim B(n_i, p)$, $i = 1, \ldots, m$. *Então, a* **soma**

$$S_m = X_1 + X_2 + \ldots + X_m = \sum_{i=1}^{m} X_i$$

tem também distribuição Binomial, isto é,

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} X_i \;\sim\; B(n_1 + \ldots + n_m, p).$$

Diferença entre as distribuições Hipergeométrica e Binomial

- Hipergeométrica: Sucessivas extracções **não** são independentes;
- Binomial: Sucessivas extracções são independentes;

Exemplo: Num lago com $N = 1000$ peixes, $M = 50$ estão saudáveis e os restantes $N - M = 950$ não estão saudáveis.

Seja X o número de peixes saudáveis numa amostra de $n = 30$ peixes, extraídos ao acaso **sem reposição**.

Então $X \sim H(1000, 50, 30)$

$$P(X=4) = \frac{\binom{50}{4}\binom{950}{26}}{\binom{1000}{30}} = 0.04386$$

Seja Y o número de peixes saudáveis numa amostra de $n = 30$ peixes, extraídos ao acaso **com reposição**.

Então $Y \sim B(30, 0.05)$

$$P(Y=4) = \binom{30}{4} 0.05^4 0.95^{26} = 0.04514$$

Aproximação da distribuição Hipergeométrica pela Binomial: Seja $X \sim H(N, M, n)$. Se $\frac{n}{N} \leq 0.1$ (o tamanho da amostra for muito pequeno, em relação ao tamanho da população), podemos aproximar a função de probabilidade (f.p.) de X pela f.p. da distribuição $B(n, p = M/N)$.

42 A probabilidade de um atirador acertar no alvo é 0.6. Calcule a probabilidade de:

(a) em cinco tiros, acertar três.
(b) acertar pela terceira vez ao quinto tiro.
(c) serem necessários exactamente 10 tiros para acertar um.
(d) necessitar de, pelo menos, 4 tiros para acertar 2.

Solução: 0.3456, 0.20736, 0.000157, 0.352

Definição (Distribuição Geométrica)

Considere as seguintes condições:

1. *Realizamos uma experiência aleatórias com dois possíveis resultados:*
   - *sucesso com probabilidade* p *(constante);*
   - *insucesso com probabilidade* $1-p$*;*
2. *Repetimos a experiência aleatória até ocorrer o primeiro sucesso;*
3. *Os resultados das experiências são mutuamente independentes;*

Então, a v.a.

$X =$ *"número de experiências necessárias até ocorrer o primeiro sucesso"*

tem **distribuição Geométrica** *de parâmetro* p*, e escrevemos* $X \sim G(p)$.

Definição (Função de probabilidade)

A função de probabilidade é:

$$\boxed{P(X=x) = p(1-p)^{x-1}, \qquad x = 1, 2, \ldots, \qquad 0 < p < 1}$$

Proposição (Função de distribuição)

A função de distribuição é:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{j=1}^{[x]} P(X=j) = 1-(1-p)^{[x]},\ x \geq 1,\ 0<p<1.}$$

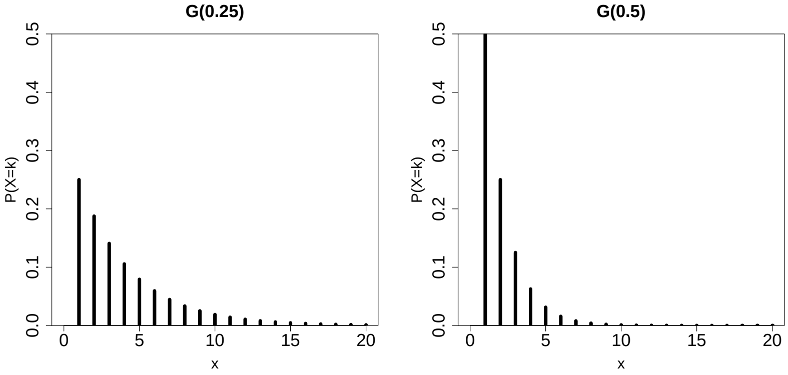


Figura: Função de probabilidade de uma v.a. $G(p)$, com $p = 0.25$ (esquerda) e $p = 0.5$ (direita)

Proposição

Considere a v.a. $X \sim G(p)$. *Então,*

$$E(X) = \frac{1}{p}, \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Como os resultados das experiências são independentes, a contagem do número de experiências necessárias até ao próximo sucesso pode ser recomeçada em qualquer experiência, sem que isso altere a distribuição da variável aleatória.

Proposição (Propriedade da falta de memória)

Para qualquer $k > v$, $\quad P(X > k | X > v) = P(X > k - v)$.

Definição: Processo de Poisson

Seja X a variável aleatória que conta o número de ocorrências de um acontecimento num dado intervalo de tempo[4] de duração t . Temos um processo de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$, quando:

1. A probabilidade p de ocorrer exactamente um acontecimento num intervalo de amplitude arbitrariamente pequena d é proporcional à sua duração, isto é, $p = \lambda d$;
2. A probabilidade de ocorrer mais do que um acontecimento num intervalo de amplitude arbitrariamente pequena é aproximadamente igual a zero;
3. O número de acontecimentos que ocorrem em dois intervalos disjuntos são independentes.
4. O número de ocorrências em dois intervalos com a mesma duração, têm a mesma distribuição.

[4] podemos considerar outra unidade de medida: área, comprimento, volume, etc.

Função de probabilidade do processo de Poisson

Seja $X(t)$ o número de ocorrências de um acontecimento num dado intervalo de tempo de duração t. Então:

$$P(X(t) = x) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0.$$

Nota:

- Num processo de Poisson, os acontecimentos acorrem a uma taxa média λ, por unidade de tempo.
- $E(X(t)) = \lambda t, \quad V(X(t)) = \lambda t.$

Exemplo (p. 47): Num processo de fabricação de placas de vidro produzem-se pequenas bolhas que se distribuem aleatoriamente pelas placas, com uma densidade média de 0.4 bolhas$/m^2$. Admitamos que $X(t)$ regista o número de bolhas observadas em placas com $t\ m^2$ e que $X(t)$ é um processo de Poisson de parâmetro $\lambda = 0.4$ bolhas$/m^2$.
Determine a probabilidade de, numa placa com $4.5m^2$, haver pelo menos uma bolha.

Distribuição de Poisson

A variável aleatória X segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λ, e escrevemos $X \sim P(\lambda)$, se a função de probabilidade de X é:

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0.$$

Teorema (Propriedade aditiva da distribuição de Poisson)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *variáveis aleatórias* **independentes** *com distribuição Poisson,* $X_i \sim P(\lambda_i)$*,* $i = 1, \ldots, n$*. Então,*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$$

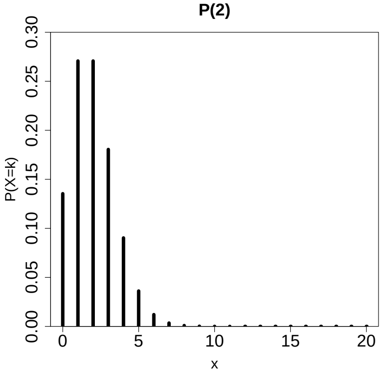


Figura: Função de probabilidade de uma v.a. $P(\lambda)$, com $\lambda = 2$ (esquerda) e $\lambda = 10$ (direita)

Seja X uma v.a. tal que $X \sim B(n,p)$. É possível de verificar que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to\lambda}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Então, caso $n \geq 50$ e $np \leq 5$, podemos aproximar a distribuição **Binomial** pela distribuição de **Poisson** com $\lambda = np$, isto é, podemos usar a aproximação da função de probabilidade

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} \approx e^{-np}\,\frac{(np)^x}{x!}.$$

Exemplo: Numa feira popular a probabilidade de uma pessoa contrair uma intoxicação alimentar é de 0.0005. Determine a probabilidade de, em 300 pessoas, 2 ficarem intoxicadas.

- Considere a v.a. $X =$ número de pessoas que contraem uma intoxicação alimentar na feira, entre as 300 pessoas.
- $X \sim B(300, 0.0005)$;
- $P(X = 2) = \binom{300}{2} 0.0005^2 (1 - 0.0005)^{300-2} = 0.009659984$ (valor exacto);
- $P(X = 2) \approx e^{-0.15} \frac{0.15^2}{2!} = 0.009682965$ (valor aproximado);

Nota: Só devemos usar a aproximação quando não conseguimos calcular o valor exacto da probabilidade.

Variável aleatória contínua

Definição (Variável aleatória contínua)

Uma v.a. X diz-se do tipo (absolutamente) contínuo ou simplesmente **contínua** *se*

$$D = \{a \in \mathbb{R} : \; P\left(X = a\right) > 0\} = \varnothing,$$

e se existe uma função não negativa, f, tal que para $I \subseteq \mathbb{R}$,

$$P\left(X \in I\right) = \int_I f(x)dx.$$

À função f chamamos **função densidade de probabilidade** *ou simplesmente* **função densidade***.*

Notas:

- Ao conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : \; f(x) > 0\}$ é chamado **suporte** de X.
- $F(x) = P(X \leq x) = P(X \in]-\infty, x])$.

Propriedades da função densidade de probabilidade:

1. $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

Observações:

- Por definição, $f(x) = F'(x)$, nos pontos onde existe derivada. Se não existir derivada, $f(x) = 0$.
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b), \ a \leq b$.
- $P(X = x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

A definição de momentos de variáveis aleatórias contínuas, encontra-se atrás, nos slides referentes à variável aleatória discreta. Apresentamos resumidamente os principais resultados:

- Valor médio de X:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

- Valor médio de uma função de X:

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Observação: Todas as propriedades do valor médio e variância, anteriormente apresentadas, continuam a ser válidas.

Definição (Quantil)

O quantil de ordem p, q_p, da v.a. X é a solução da equação

$$F(q_p) = p \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq q_p) = p.$$

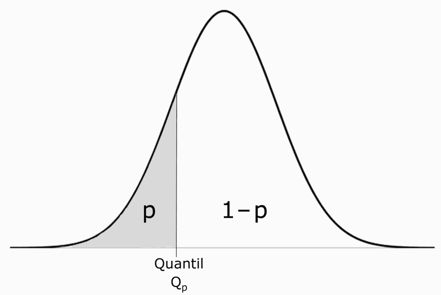


Figura: Quantil q_p de uma v.a. contínua.

Observações:

- Se X é uma v.a. **contínua** e F tem função inversa F^{-1} a equação é equivalente a

$$F(q_p) = p \quad \Leftrightarrow \quad q_p = F^{-1}(p), \quad 0 < p < 1;$$

- Se X é uma v.a. **discreta**, a equação $F(q_p) = p$ só tem solução para alguns valores de p;
- Caso a equação $F(q_p) = p$ não tenha solução, consideramos $q_p = \min\{x : F(x) \geq p\}$.

Definição (Mediana)

É o quantil de ordem $p = 1/2$. Costuma-se representar por $med(X)$.

Definição (Quartis)

São os quantis de ordem $p = 0.25,\ 0.5,\ 0.75$, isto é, $q_{0.25}$, $q_{0.5}$ e $q_{0.75}$.

Distribuição Uniforme Contínua

Definição (Distribuição Uniforme Contínua)

X segue uma **distribuição Uniforme** *no intervalo $[a, b]$, e escrevemos $X \sim U(a, b)$, se a função densidade de probabilidade de X for igual a*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \ , & a \leq x \leq b \\ 0 \ , & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Nota: *Se $a = 0$ e $b = 1$, temos a distribuição Uniforme standard (ou padrão).*

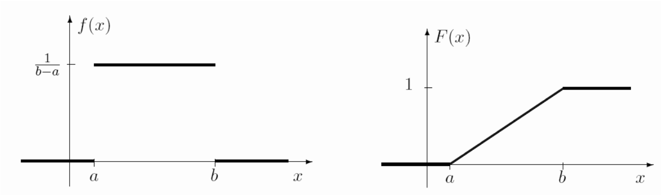


Figura: Função densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição (direita) de uma v.a. $X \sim U(a, b)$.

A $U(a,b)$ é utilizada para caracterizar uma variável que varia aleatoriamente num intervalo limitado. Quaisquer dois sub-intervalos de $[a,b]$, com a mesma amplitude, têm a mesma probabilidade de conter uma observação.

Proposição

Considere a v.a. $X \sim U(a,b)$. Então:

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$;
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$;
- $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}.$

Exercício: Numa paragem de autocarro, o tempo de espera de um passageiro pelo próximo autocarro, é uma variável aleatória contínua, X, uniformemente distribuída entre 0 e 12 minutos.

(a) Qual a probabilidade de uma pessoa esperar mais do que 10 minutos pelo próximo autocarro?

(b) Qual o tempo médio de espera pelo próximo autocarro?

(c) Determine o desvio padrão de X.

(d) Determine o coeficiente de assimetria de X.

(e) Determine o valor de w, sabendo que 5% das pessoas, espera mais do que w minutos pelo próximo autocarro.

Solução: (a) 0.2 (b) 6 minutos (c) $2\sqrt{3}$ minutos (d) 0 (e) $w = 11.4$ minutos

Definição (Distribuição Exponencial)

X *tem* **distribuição Exponencial** *de parâmetro* λ, *e escrevemos* $X \sim Exp(\alpha, \delta)$, *se a sua função densidade probabilidade for dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}\, e^{-(x-\alpha)/\delta}, & x > \alpha, \\ 0\ , & x \leq \alpha, \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0.$$

Proposição

Seja $X \sim Exp(\alpha, \delta)$. *Então,*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha, \\ 1 - \ e^{-(x-\alpha)/\delta}, & x > \alpha. \end{cases}$$

Coeficientes importantes: $\boxed{E(X) = \alpha + \delta}$ e $\boxed{V(X) = \delta^2}$.

Proposição (Relação entre as distribuições Exponencial e Poisson)

Considere um acontecimento que ocorre de acordo com um Processo de Poisson de parâmetro λ, por unidade de tempo. Então, o tempo até à primeira ocorrência e o tempo entre duas ocorrências consecutivas têm distribuição $Exp(0, 1/\lambda)$.

Teorema (Propriedade da falta de memória da distribuição Exponencial)

Seja $X \sim Exp(0, \delta)$. Então,

$$P(X \geq s + t | X \geq s) = P(X \geq t).$$

Definição (Distribuição Normal)

A variável aleatória X diz-se seguir uma **distribuição Normal** *(ou Gaussiana) de parâmetros μ e σ^2, e escrevemos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se a sua função densidade probabilidade for dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

A Função de distribuição de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, é definida pelo integral

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

para o qual não se conhece **solução analítica**.

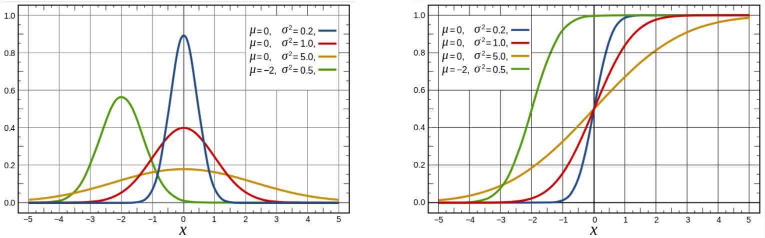


Figura: Função densidade (esquerda) e função de distribuição (direita) de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Figuras retiradas de `https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution`

Proposição

Seja a v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. *Então,*

$$E(X) = \mu \qquad e \qquad V(X) = \sigma^2.$$

Distribuição Normal

Teorema

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *e* a, b *são constantes reais, com* $a \neq 0$, *então,*

$$Y = aX + b \ \sim \ N(a\mu + b, a^2\sigma^2),$$

e

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1). \quad \textit{(Normal Reduzida)}$$

É usual representar as funções densidade de probabilidade e de distribuição da **Normal Reduzida** por ϕ e Φ, respectivamente.

No caso particular da **Normal Reduzida**, os valores da função de distribuição $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ encontram-se **tabelados**.

Distribuição Normal

Teorema

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *variáveis aleatórias independentes tais que*

$$X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Considerando as constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$*, com algum* $a_i \neq 0$*, temos:*

$$Y = a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$$

onde

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i = a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n \\ \sigma_Y^2 &= V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2 \end{aligned}$$

Corolário

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *variáveis aleatórias independentes tais que*

$$X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Temos:

$$Y \;=\; X_1 + X_2 + \ldots + X_n \;\sim\; N\left(n\mu, n\sigma^2\right),$$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

[1º teste de Estatística, 23 de Novembro de 2013]

4. Numa população, o nível de colesterol em adultos (medido em mg/dl) é uma variável aleatória, X, com distribuição Normal com parâmetros $\mu = 225$ e $\sigma = 75$.

(Extra) Calcule $P(X \leq 200)$ e $P(X \leq 350)$.

(a) Calcule a $P(200 \leq X \leq 350)$. [0.5828]

(b) Qual é o valor de colesterol, a partir do qual se encontra 2.5% da população adulta com colesterol mais elevado? [371.9973]

(c) Três adultos realizaram análises ao sangue para medir o nível de colesterol. Qual é a probabilidade da média dos níveis de colesterol dos três adultos ser inferior a 230. (Assuma que o nível de colesterol no sangue é independente de pessoa para pessoa) [0.546]

[1º Teste de Probabilidades e Estatística D 2005/06]

Um foguete espacial é constituído por 3 partes distintas, *cápsula*, *corpo* e *depósitos*. Representem as v.a.'s X, Y e W o peso da cápsula, o peso do corpo do foguete e o peso dos depósitos, respectivamente, em toneladas. Sabe-se que $X \sim N(5, 1)$, $Y \sim N(10, 2^2)$ e $W \sim N(7, 2^2)$, sendo as três variáveis independentes entre si.

1. Qual a probabilidade de o peso da cápsula estar compreendido entre 3 e 7 toneladas? [0.9544]
2. Qual o peso h que o corpo do foguete ultrapassa em 2.5% das vezes? [13.92]
3. Qual a probabilidade de o peso da cápsula mais o peso dos depósitos excederem o peso do corpo do foguete? [0.7486]

Definição (Distribuição do Qui Quadrado)

Uma variável aleatória X tem distribuição **Qui-quadrado** *com n graus de liberdade, e escrevemos $X \sim \chi_n^2$, se a sua função densidade de probabilidade for dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{n/2}} e^{-x/2} x^{n/2-1}, & x > 0 \end{cases}$$

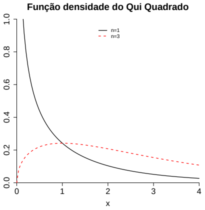


Figura: Função densidade de probabilidade de uma v.a. $X \sim \chi_n^2$.

Distribuição do Qui Quadrado

Proposição

Considere a v.a. $X \sim \chi^2_n$. *Então,*

$$E(X) = n \quad e \quad V(X) = 2n.$$

Teorema

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.'s independentes com distribuição* $N(0,1)$. *Então,*

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 \sim \chi^2_n.$$

Distribuição t de Student

Definição (Distribuição t de Student)

Sejam $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2_n$, com X e Y independentes. Então a seguinte variável aleatória:

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

tem distribuição t-student com n graus de liberdade e escrevemos $T \sim t_n$. A sua função densidade probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}(1 + x^2/n)^{-(n+1)/2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

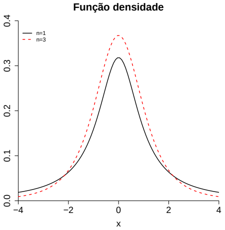


Figura: Função densidade de probabilidade de uma v.a. $X \sim t_n$.

Proposição

Seja $X \sim t_n$. Então,

$$E(X) = 0, \quad n > 1 \qquad e \qquad V(X) = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

Teorema Limite Central

Teorema (**Teorema Limite Central**)

Seja $X_1, X_2 \ldots,$ *uma sucessão de v.a.'s* **i***ndependentes e* **i***denticamente* **d***istribuídas (***i.i.d.***), com valor médio* μ *e variância* $\sigma^2 \neq 0$*, finitos. Considere as v.a.'s* $\boxed{S_n = \sum_{i=1}^n X_i}$ *e* $\boxed{\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}}$*. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{x-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

ou seja

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \stackrel{a}{\sim} N(0,1) \qquad e \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1),$$

quando $n \to \infty$.

- O Teorema Limite Central é um resultado muito importante, pois permite calcular aproximadamente as seguintes probabilidades

$$P(S_n \leq x) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

e

$$P(\bar{X}_n \leq x) = P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{x - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

- Na prática, usamos o Teorema Limite Central quando temos $n \geq 30$.

Exemplo

Num estudo sobre vendas num hipermercado, concluiu-se que a procura diária de arroz é uma v.a. com valor médio 40kg e desvio-padrão 5kg. Tendo sido encomendado 14500kg de arroz para venda no próximo ano, qual a probabilidade deste stock cobrir a procura de arroz nesse período?

Nota: considere que o hipermercado está aberto 364 dias.

Corolário

Seja X uma v.a. com distribuição **Binomial** *de parâmetros n e p, isto é, $X \sim B(n,p)$. Se $n \geq 30$ e p tal que $np > 5$ e $n(1-p) > 5$, então:*

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Corolário

Seja X uma v.a. com distribuição **Poisson** *de parâmetro λ, isto é, $X \sim P(\lambda)$. Se $\lambda > 5$, então:*

$$\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Simulação

É uma técnica que permite estudar o comportamento de modelos probabilísticos. É usada frequentemente em situações onde é muito difícil, ou até mesmo impossível, obter uma solução exacta do modelo. Iremos apenas referir a simulação estocástica pelo método de Monte Carlo (MMC).

O MMC é usado em diversas áreas, sendo por exemplo aplicado em:

- Resolução de integrais e equações diferenciais;
- Controlo de tráfego;
- Previsão de Índices Financeiros;
- Modelação de materiais;
- Aerodinâmica;

Geração de números pseudo-aleatórios

Um método de gerar os valores aleatórios do intervalo $]0,1[$, consiste em colocar numa urna 10 bolas numeradas de 0 a 9 e proceder à extracção, com reposição, de m bolas. Os algarismos extraídos constituem as m casas decimais do número aleatório. Mas é um método muito demorado!

Actualmente, a simulação é feita com computadores, utilizando números gerados por um processo determinístico, mas com um comportamento semelhante aos números efectivamente aleatórios. Estes números designam-se por **números pseudo-aleatórios** (NPA's).

Qualquer programa computacional que sirva para gerar NPA's deve satisfazer os seguintes requisitos:

- Deve ser **rápido**;
- Deve ter **ciclos longos**;
- Os números gerados devem poder ser **reproduzidos** (com a mesma semente) e devem apresentar um **comportamento independente** e **uniforme**;

Geração de números pseudo-aleatórios

Definição (Método Congruencial)

Permite gerar uma sequência de números inteiros no intervalo $[0, m-1]$, *através da seguinte fórmula recursiva:*

$$x_0 = \text{“semente”}$$
$$x_i = (a\, x_{i-1} + c)(\bmod m), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

onde a, c *e* m *são números inteiros* $(a,\ c < m)$ *e* $x(\bmod m)$ *representa o resto da divisão inteira de* x *por* m. *O comprimento do ciclo é menor ou igual a* m.

Exemplo: Seja $a = 5$, $c = 7$ e $m = 8$ e $x_0 = 0$. Os primeiros números são:

i	**0**	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15	**16**	17	18	19
x_i	**0**	7	2	1	4	3	6	5	**0**	7	2	1	4	3	6	5	**0**	7	2	1

Neste exemplo, o comprimento do ciclo é 8.

Nota: A conversão de números inteiros em $[0, m-1]$, para valores no intervalo $]0, 1[$ é feita através da transformação: $u_i = (x_i + 1/2)/m, \quad i = 1, 2, \ldots$

Embora o método congruencial consiga gerar NPA's com qualidade aceitável, é necessário escolher convenientemente as constantes a, c e m. Por exemplo, o comprimento do ciclo é igual a m (máximo valor possível), e independente da semente x_0, se

- $a = 4c + 1$, com $c \in \mathbb{N}$ e c é ímpar;
- $m = 2^k$, com $k \in \mathbb{N}$.

Tabela: Algumas implementações do método Congruencial

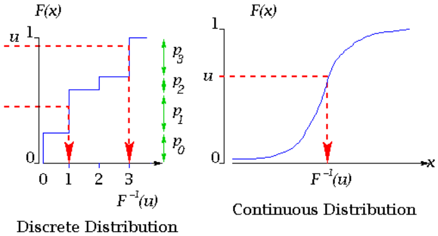
	m	a	c
Turbo Pascal 3	2^{32}	129	907633385
Borland Delphi, Virtual Pascal	2^{32}	134775813	1
Numerical Recipes in C	2^{32}	1664525	1013904223
Borland C/C++	2^{32}	22695477	1
ANSI C: Watcom, Digital Mars, CodeWarrior	2^{32}	1103515245	12345
Microsoft Visual/Quick C/C++	2^{32}	214013	2531011

Teorema (Teorema da transformação uniformizante)

Seja X uma v.a. contínua com função de distribuição F. Então

$$F(X) \sim U(0,1).$$

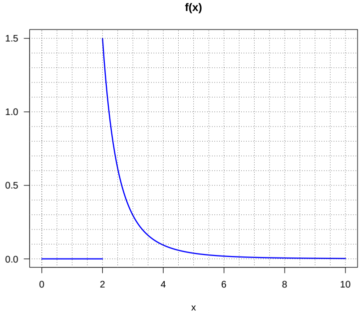
Logo, para obter uma observação de X, basta calcular $F^{-1}(u)$, $u \in]0,1[$.
Se não existir F^{-1}, consideramos $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$.

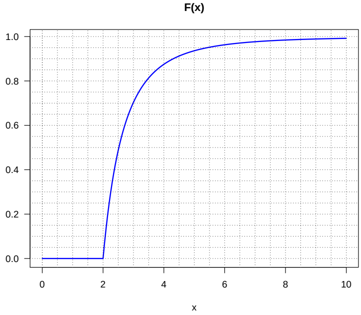


Fonte: http://www.iro.umontreal.ca/ vazquez/SimSpiders/GenerRV/Methods/inverse.gif

Exemplo: Considere a variável aleatória X com função densidade f e função de distribuição F dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{24}{x^4}, & x > 2 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 1 - \frac{8}{x^3}, & x > 2 \end{cases}$$





Para gerar uma sequência de n NPA's é necessário calcular $x_i = 2/\sqrt[3]{1-u_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sendo u_1, u_2,. . . ,u_n uma sequência de NPA's uniformes em $]0, 1[$.

Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade,

$$p_j = P(X = x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, k \qquad \text{com} \qquad \sum p_j = 1.$$

Então a sua função de distribuição é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ 1, & x \geq x_k \end{cases}$$

Para gerar um NPA w desta distribuição, a partir de um valor u uniforme, basta escolher:

$$w = \begin{cases} x_1, & 0 < u \leq p_1 \\ x_2, & p_1 < u \leq p_1 + p_2 \\ \vdots & \\ x_k, & \sum_{i=1}^{k-1} p_i < u < 1 \end{cases}$$

1. Uma das distribuições, usada no estudo do tempo de vida de componente mecânicos, é a distribuição $Weibull(\alpha, \beta)$, com função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha x^{\beta}}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{com} \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

(a) Indique como gerar observações da distribuição $Weibull(3, 5)$, a partir de NPA's uniformes no intervalo]0,1[.

(b) Suponha que foram gerados os valores $u_1 = 0.2517$, $u_2 = 0.7437$ e $u_3 = 0.1911$ da $U(0, 1)$. Calcule os valores gerados da $Weibull(3, 5)$.

2. Considere a distribuição Cauchy (trata-se da distribuição t de Student com 1 grau de liberdade) com função densidade

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Verifique que a sua função de distribuição é $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Indique como gerar observações da distribuição Cauchy, a partir de valores gerados para a distribuição $U(0, 1)$.

(c) Imagine que gerámos os NPA's $u_1 = 0.6235$ e $u_2 = 0.4515$ da $U(0, 1)$. Quais os valores gerados para a distribuição Cauchy?

3 (Teste de P.E. 2007/08) Considere a v.a. X com função densidade, $f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$. Sejam $u_1 = 0.2517$ e $u_2 = 0.7437$ dois números pseudo-aleatórios da distribuição $U(0,1)$. Usando o método da Transformação Inversa, calcule dois números pseudo-aleatórios da v.a. X. Observação: $P(X \leq x) = x^2, \quad 0 < x < 1$.

Solução dos exercícios

1 (a) Seja u um NPA da distribuição $U(0,1)$. Então, $x = \sqrt[5]{-\frac{\ln(1-u)}{3}}$ é um NPA da distribuição Weibull(3,5).

(b) Os NPA gerados são: $x_1 = 0.6267$, $x_2 = 0.8538$ e $x_3 = 0.5887$.

2 (a)

(b) Seja u um NPA da distribuição $U(0,1)$. Então, $x = \tan((u - 1/2)\pi)$ é um NPA da distribuição Cauchy.

(c) Os NPA gerados são: $u_1 = 0.4087$ e $u_2 = -0.1536$.

3 $x_1 = \sqrt{0.2517} = 0.5017 \qquad x_2 = \sqrt{0.7437} = 0.8624$