Probabilidades e Estat´ıstica E 1

1Ultima actualiza¸c˜ao a 28 de Fevereiro de 2018 ´

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 1 / 117

Programa

1 Introdu¸c˜ao `a Teoria das Probabilidades

2 Vari´aveis aleat´orias e suas distribui¸c˜oes de probabilidade (a) Defini¸c˜ao de vari´avel aleat´oria;

(b) Momentos de vari´aveis aleat´orias;

(c) Algumas distribui¸c˜oes importantes

(d) Vectores aleat´orios

3 Teorema Limite Central

4 Estima¸c˜ao pontual

5 Estima¸c˜ao por intervalo de confian¸ca

6 Testes de hip´oteses

7 Regress˜ao linear simples

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 2 / 117

Pagina da disciplina: ´

| https://clip.unl.pt/ |
| --- |

Programa

Regras de avalia¸c˜ao

Hor´ario de atendimento

Hor´ario das aulas

Documenta¸c˜ao de apoio

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 3 / 117

Calculo Combinat ´ orio - Revis ´ ao˜

N´umero de maneiras diferentes de escolher *k* elementos, de um conjunto de *n* elementos:

H´a repeti¸c˜ao?

Sim N˜ao

Interessa a

ordem?

| Sim  N˜ao | Arranjos com rep.: *nA0k* = *nk*  Comb. com rep. *nC0k* =(*n*+*k−*1)!  (*n−*1)!*k*! | Arranjos:  *nAk* =*n*!  (*n−k*)!  Combina¸c˜oes  *nCk* =*nk*=*n*! (*n−k*)!*k*! |
| --- | --- | --- |

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 4 / 117

Calculo Combinat ´ orio - Revis ´ ao˜

Sejam *A* = *{a*1*, . . . , an}* e *B* = *{b*1*, . . . , bm}* conjuntos com *n* e *m* elementos distintos, respectivamente.

Produto cartesiano:

Designa-se por produto cartesiano o conjunto de pares (*ai, bj* ) em que o primeiro elemento prov´em de *A* e o segundo de *B* e representa-se por *A × B*.

O n´umero de elementos de *A × B* ´e

| #(*A × B*) = *n × m.* |
| --- |

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 5 / 117

Calculo Combinat ´ orio ´

1 Os escrit´orios de uma empresa est˜ao equipados com telefones funcionando inter namente como extens˜oes identificadas por uma sequˆencia de 3 algarismos, dos quais o primeiro n˜ao ´e zero. Quantos telefones podem ser identificados?

4 Um centro comercial tem 8 portas. De quantas maneiras distintas se pode

(a) entrar e sair do centro comercial?

(b) entrar por uma porta e sair por outra?

7 Quatro livros de Matem´atica, seis de F´ısica e dois de Qu´ımica, todos diferen tes, devem ser arrumados numa prateleira. Quantas arruma¸c˜oes diferentes s˜ao poss´ıveis, se:

(a) os livros de cada mat´eria ficarem todos juntos?

(b) apenas os livros de Matem´atica ficarem juntos?

9 Vinte e cinco membros de uma sociedade devem eleger um presidente, um se cret´ario e um tesoureiro. Supondo que qualquer um dos vinte e cinco membros ´e eleg´ıvel para qualquer dos cargos, quantas s˜ao as hip´oteses distintas de elei¸c˜ao?

15 De quantas maneiras distintas se poder´a formar uma comiss˜ao, com trˆes elemen tos escolhidos de entre os vinte e cinco membros de uma sociedade?

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 6 / 117

Introduc¸ao˜ a Teoria da Probabilidade `

Defini¸c˜ao (Experiˆencia aleat´oria)

*Uma* experiˆencia aleat´oria *´e uma experiˆencia na qual:*

– *todos os poss´ıveis resultados da experiˆencia s˜ao conhecidos `a partida;* – *para qualquer realiza¸c˜ao da experiˆencia n˜ao se sabe, antes desta ocorrer, qual dos seus poss´ıveis resultados vai acontecer;* – *a experiˆencia pode sempre ser repetida sob idˆenticas condi¸c˜oes.*

Exemplos:

resultado do lan¸camento de uma moeda ao ar (assumindo que n˜ao “aterra” de lado!);

no de *pintas* ap´os o lan¸camento de um dado;

o tempo de vida de uma lˆampada;

Chave do Euromilh˜oes.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 7 / 117

Introduc¸ao˜ a Teoria da Probabilidade `

Defini¸c˜ao (Espa¸co de resultados ou universo)

*Chamamos* espa¸co de resultados *ou* universo*, e representamos por* Ω*, ao conjunto de todos os poss´ıveis resultados de uma experiˆencia aleat´oria.*

Exemplos:

resultado do lan¸camento de uma moeda ao ar (assumindo que n˜ao “aterra” de lado!). Ω = *{*Cara, Coroa*}*;

no de *pintas* ap´os o lan¸camento de um dado. Ω = *{*1*,* 2*,* 3*,* 4*,* 5*,* 6*}*; o tempo de vida de uma lˆampada. Ω = *{t ∈* R : *t ≥* 0*}* = R+0;

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 8 / 117

Introduc¸ao˜ a Teoria da Probabilidade `

Defini¸c˜ao (Acontecimento)

*Um* acontecimento *´e um subconjunto do espa¸co de resultados,* Ω*.*

Defini¸c˜ao (Diagrama de Venn)

*Representa¸c˜ao gr´afica do espa¸co de resultados (rectˆangulo) e de aconte cimentos (c´ırculos). No seguinte exemplo, o diagrama apresenta o espa¸co de resultados (*Ω*) e dois acontecimentos (A e B).*

| Ω  *A B* |
| --- |

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 9 / 117

Introduc¸ao˜ a Teoria da Probabilidade `

Notas:

Cada acontecimento formado por apenas um ponto amostral ´e de signado por acontecimento simples ou elementar.

Ao conjunto ∅ chamamos acontecimento imposs´ıvel

Ao conjunto Ω chamamos acontecimento certo.

Defini¸c˜ao (Sub-acontecimento)

*A ´e* sub-acontecimento *de B, e escreve-se A ⊂ B, se e s´o se a realiza¸c˜ao de A implica a realiza¸c˜ao de B.*

Defini¸c˜ao (Acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos)

*Se A ∩ B* = ∅*, dizemos que os acontecimentos A e B s˜ao* disjuntos *ou* mutuamente exclusivos*.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 10 / 117

Introduc¸ao˜ a Teoria da Probabilidade `

Principais Opera¸c˜oes:

Podemos aplicar as opera¸c˜oes usuais sobre conjuntos de modo a obter outros acontecimentos de interesse. As opera¸c˜oes mais usuais s˜ao: A uni˜ao de dois acontecimentos *A* e *B*, *A ∪ B*;

A intersec¸c˜ao de dois acontecimentos *A* e *B*, *A ∩ B*;

O complementar do acontecimento *A*, *A*;

A diferen¸ca dos acontecimentos *A* e *B*, *A − B* (= *A ∩ B*);

Diagramas de Venn das principais opera¸c˜oes:

| *A ∪ B*  *A B* |  | *A ∩ B*  *A B* |  |  |  | *A − B*  *A B* |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 11 / 117

Introduc¸ao˜ a Teoria da Probabilidade `

Propriedades importantes:

*A ∪ B* = *B ∪ A* (Prop. comutativa)

*A ∩ B* = *B ∩ A* (Prop. comutativa)

(*A ∪ B*) *∪ C* = *A ∪* (*B ∪ C*) (Prop. associativa)

(*A ∩ B*) *∩ C* = *A ∩* (*B ∩ C*) (Prop. associativa)

(*A ∪ B*) *∩ C* = (*A ∩ C*) *∪* (*B ∩ C*) (Prop. distributiva) (*A ∩ B*) *∪ C* = (*A ∪ C*) *∩* (*B ∪ C*) (Prop. distributiva)

*A* = *A* (dupla nega¸c˜ao)

(*A ∪ A*) = (*A ∩ A*) = *A* (idempotˆencia)

*A ∪ B* = *A ∩ B* (Leis de De Morgan)

*A ∩ B* = *A ∪ B* (Leis de De Morgan)

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 12 / 117

Definic¸ao de Probabilidade ˜

Defini¸c˜ao (Defini¸c˜ao cl´assica, ou de Laplace, de Probabilidade)

*Se uma experiˆencia aleat´oria tem a si associado um n´umero finito N de resultados, mutuamente exclusivos e igualmente prov´aveis, ent˜ao a probabilidade de qualquer acontecimento A, P*(*A*)*, ´e dada por:*

| *N*=*no de resultados favor´aveis a A*  *P* (*A*) = *NA*  *n~~o~~ de resultados poss´ıveis .* |
| --- |

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 13 / 117

Definic¸ao de Probabilidade ˜

Exerc´ıcio 1: Considere a experiˆencia aleat´oria que consiste no lan¸camento de um dado e registo do n´umero de pontos da face virada para cima. Definam-se os acontecimentos:

| A - O n´umero ´e menor que 3; |
| --- |

Determine a probabilidade de:

| B - O n´umero ´e par. |
| --- |

Ocorrer pelo menos um dos acontecimentos; 

Ocorrer A e B;

Ocorrer A mas n˜ao B;

N˜ao ocorrer A.

Exerc´ıcio 2: Retiramos ao acaso cinco cartas de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de obtermos os quatros ases? 

Solu¸c˜ao: Ex1: 2/3, 1/6, 1/6, 2/3. Ex.2: 48/2598960

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 14 / 117

Definic¸ao de Probabilidade ˜

Defini¸c˜ao (Defini¸c˜ao frequencista de Probabilidade)

*P*(*A*) *´e avaliada a partir de informa¸c˜ao existente sobre A, sendo dada pelo limite da frequˆencia relativa com que se observou A, isto ´e,*

| *P* (*A*) = lim*n→∞nA n,* |
| --- |

*onde nA representa o n´umero de observa¸c˜oes de A e n o n´umero de realiza¸c˜oes da experiˆencia aleat´oria.*

*Para valores elevados de n, P*(*A*) *≈nA*

*n.*

Defini¸c˜ao (Defini¸c˜ao subjectiva de Probabilidade)

*P*(*A*) *resulta da avalia¸c˜ao de um especialista no assunto.* Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 15 / 117

Definic¸ao de Probabilidade ˜

Defini¸c˜ao (Defini¸c˜ao Axiom´atica de Probabilidade)

*Seja A uma fam´ılia de acontecimentos, fechada para as opera¸c˜oes usuais. A Probabilidade ´e uma fun¸c˜ao cujo dom´ınio ´e A e que verifica as seguintes condi¸c˜oes ou axiomas:*

1 *P*(*A*) *≥* 0*, qualquer que seja o acontecimento A ∈ A;* 2 *P*(Ω) = 1*;*

3 *Se A e B s˜ao acontecimentos disjuntos, isto ´e, se A ∩ B* = ∅ *ent˜ao P*(*A ∪ B*) = *P*(*A*) + *P*(*B*)*.*

Esta axiom´atica n˜ao contempla situa¸c˜oes em que temos de considerar uma infinidade de acontecimentos. E usual substituir ´ por

| 3 |
| --- |

3 Se *A*1, *A*2,. . . s˜ao acontecimentos disjuntos dois a dois, ent˜ao

*P*

[*∞ i*=1

!

*Ai*

=X*∞ i*=1

*P*(*Ai*)*.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 16 / 117

Definic¸ao de Probabilidade ˜

Consequencias da def. Axiom ˆ atica de Prob. ´

Sejam *A* e *B* dois acontecimentos. Ent˜ao s˜ao consequˆencias imediatas dos axiomas os seguintes resultados:

1 *P*(∅) = 0;

2 Se *A ⊂ B* ent˜ao *P*(*A*) *≤ P*(*B*);

3 *P*(*A*¯) = 1 *− P*(*A*);

4 *P*(*A*) *∈* [0*,* 1];

5 *P*(*A − B*) = *P*(*A ∩ B*) = *P*(*A*) *− P*(*A ∩ B*);

6 *P*(*A ∪ B*) = *P*(*A*) + *P*(*B*) *− P*(*A ∩ B*);

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 17 / 117

Definic¸ao de Probabilidade ˜ Consequencias da def. Axiom ˆ atica de Prob. ´

7 Dados os acontecimentos *Ai*, *i* = 1*, . . . , n*, *P* (*∪ni*=1*Ai*) =*P*(*A*1 *∪ A*2 *∪ . . . ∪ An*) =

=X*n i*=1

*P* (*Ai*) *−*X *i6*=*j*

*P* (*Ai ∩ Aj* )

+X *i6*=*j6*=*k*

*P* (*Ai ∩ Aj ∩ Ak*) *− . . .* + (*−*1)*n−*1 *P* (*∩ni*=1*Ai*)

Defini¸c˜ao (Acontecimentos incompat´ıveis)

*Dois* acontecimentos *A e B dizem-se* incompat´ıveis *se P* (*A ∩ B*) = 0*.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 18 / 117

Probabilidade Condicional

Realizou-se um ensaio cl´ınico para testar um novo medicamento. Escolheram se 200 doentes com a mesma doen¸ca. 100 desses doentes foram tratados com o novo medicamento e os restantes 100 com o medicamento con vencional. Os resultados foram os seguintes:

Melhorou (*M*) N˜ao melhorou (*M*)

Medicamento experimental (*E*) 100

| 69  58 | 31  42 |
| --- | --- |

Medicamento convencional (*E*) 100 127 73 200

1 Qual a probabilidade de um doente, escolhido ao acaso, (a) melhorar?

(b) tomar o medicamento experimental e melhorar?

2 Qual a probabilidade de um doente, que tomou o medicamento experimental, melhorar?

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 19 / 117

Probabilidade Condicional

Defini¸c˜ao (Probabilidade condicional)

*A* probabilidade condicional *de A dado B ´e*

*P*(*A|B*) = *P*(*A ∩ B*)

*P*(*B*)*, se P*(*B*) *>* 0*.* (1)

Observa¸c˜ao: Resulta de (1) o seguinte teorema,

Teorema (Teorema da Probabilidade Composta)

*Sejam A e B dois acontecimentos tais que P*(*B*) *>* 0*. Ent˜ao, P* (*A ∩ B*) = *P* (*A |B* ) *P* (*B*)*.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 20 / 117

Independencia de acontecimentos ˆ

| *P*(*A|B*) = *P*(*A*) |
| --- |

Nalguns casos verifica-se que , ou seja, o conhecimento da ocorrˆencia de *B* n˜ao afecta a probabilidade de *A* ocorrer.

Defini¸c˜ao (Acontecimentos Independentes)

*Dois acontecimentos A e B dizem-se* independentes *se e s´o se P* (*A ∩ B*) = *P* (*A*) *P* (*B*)*.*

Teorema

*Se A e B s˜ao acontecimentos independentes, tamb´em s˜ao independentes A e B*¯ *, A*¯ *e B e ainda A*¯ *e B*¯ *.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 21 / 117

Teorema da probabilidade total

Nota: Dizemos que *{B*1*, B*2*, . . . , Bn}* ´e uma parti¸c˜ao do espa¸co de resultados, Ω, quando *Bi ∩ Bj* = ∅ (*i 6*= *j*) e *∪ni*=1 *Bi* = Ω*.*

**

Teorema (Teorema da probabilidade total)

*Seja {B*1*, B*2*, . . . , Bn} uma* parti¸c˜ao do espa¸co de resultados Ω*, com P* (*Bi*) *>* 0*, ∀i. Dado um qualquer acontecimento A, tem-se*

*P* (*A*) = *P* (*A |B*1 ) *P* (*B*1) + *. . .* + *P* (*A |Bn* ) *P* (*Bn*)

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 22 / 117

Teorema de Bayes

Teorema (Teorema de Bayes)

*Seja {B*1*, B*2*, . . . , Bn} uma parti¸c˜ao do espa¸co de resultados* Ω*, com P* (*Bi*) *>* 0*, ∀i. Dado um qualquer acontecimento A, com P* (*A*) *>* 0*,*

*P* (*Bj |A*) = *P* (*A |Bj* ) *P* (*Bj* )

*P*(*A*)

=*P* (*A |Bj* ) *P* (*Bj* )

P*~~n~~*

*i*=1 *P* (*A |Bi*) *P* (*Bi*)*.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 23 / 117

Exemplo: Teste de PE D - 2007/08

Trˆes m´aquinas A, B e C produzem bot˜oes, respectivamente, 15%, 25% e 60% da produ¸c˜ao total. As percentagens de bot˜oes defeituosos fabricados por estas m´aquinas s˜ao respectivamente 5%, 7% e 4%.

*Diga, justificando, se a seguinte afirma¸c˜ao ´e verdadeira ou falsa:* Se ao acaso, da produ¸c˜ao total de bot˜oes, for encontrado um defeituoso, a probabilidade de ele ter sido produzido pela m´aquina B ´e de cerca de 36%.

*Resolu¸c˜ao:*

Sejam *A*, *B*, *C* e *D* os seguintes acontecimentos:

A - Bot˜ao produzido pela m´aquina A; B - Bot˜ao produzido pela m´aquina B; C - Bot˜ao produzido pela m´aquina C; D - Bot˜ao com defeito;

De acordo com o enunciado, *P*(*A*) = 0*.*15, *P*(*B*) = 0*.*25, *P*(*C*) = 0*.*6, *P*(*D|A*) = 0*.*05, *P*(*D|B*) = 0*.*07 e *P*(*D|C*) = 0*.*04.

Usando o Teorema de Bayes, *P*(*B|D*) = 175*/*490 *'* 36%*.* Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 24 / 117

Variavel aleat ´ oria ´

Muitos autores apresentam uma defini¸c˜ao simples de vari´avel aleat´oria. No livro Murteira *et al.* (2007)2 podemos encontrar a seguinte defini¸c˜ao:

Defini¸c˜ao (Vari´avel aleat´oria)

*Uma vari´avel aleat´oria, X, ´e uma fun¸c˜ao com dom´ınio* Ω *e com contradom´ınio em* R*. Assim,*

*X* : *ω ∈* Ω *−→ X*(*ω*) *∈* R*.*

**

Figura: Imagem obtida em

http://archive.cnx.org/resources/64fd28e79e27bc8f4d43303ca7d6a27ba13d7f9e/Figure2-1.png

2Murteira, B., Ribeiro, C., Silva, J. e Pimenta, C. (2007). Introdu¸c˜ao `a Estat´ıstica, 2aedi¸c˜ao. McGraw-Hill. Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 25 / 117

Variavel aleat ´ oria ´

Exemplo

*Considere a experiˆencia que consiste em lan¸car 2 moedas equilibradas, e registar as faces que ficam voltadas para cima. O espa¸co de resultados ´e*

Ω = *{*(*Ca, Ca*)*,*(*Ca, Co*)*,*(*Co, Ca*)*,*(*Co, Co*)*}.*

*Podemos,* por exemplo3*, atribuir*

**

3Neste exemplo, *X* = n´umero de caras.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 26 / 117

Variavel aleat ´ oria ´

Muitos autores apresentam um defini¸c˜ao diferente de vari´avel aleat´oria. Vamos em breve apresentar essa defini¸c˜ao.

Defini¸c˜ao

*A imagem do* acontecimento *A por X ´e o conjunto de valores reais: X*(*A*) = *{X*(*ω*) : *ω ∈ A}.*

Exemplo:



| *X*(*A*) = *{*1*,* 2*}* |
| --- |

Se *A* = *{*(Ca,Ca), (Ca,Co)*}*, a imagem de *A* por *X* ´e . Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 27 / 117

Variavel aleat ´ oria ´

Defini¸c˜ao

*A imagem inversa de D ⊂* R *por X ´e o subconjunto de* Ω*: X−*1(*D*) = *{ω ∈* Ω : *X*(*ω*) *∈ D}.*

Exemplo: Sejam *D*1 = *{*0*,* 2*}*, *D*2 =]0*,* 2], *D*3 = [3*,* +*∞*[ e *D*4 =] *− ∞,* 0]. Ent˜ao,

*X−*1(*D*1) = *{*(*Ca, Ca*)*,*(*Co, Co*)*}*;

*X−*1(*D*2) = *{*(*Ca, Ca*)*,*(*Co, Ca*)*,*(*Ca, Co*)*}*;

*X−*1(*D*3) = ∅

*X−*1(*D*4) = *{*(*Co, Co*)*}*.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 28 / 117

Variavel aleat ´ oria ´

Defini¸c˜ao (Vari´avel aleat´oria)

*Uma* vari´avel aleat´oria *X (v.a.) ´e uma aplica¸c˜ao X* : Ω *→* R *tal que, X−*1(] *− ∞, x*]) = *Ax* = *{ω ∈* Ω : *X* (*ω*) *≤ x} , ∀x ∈* R*, ´e um acontecimento.*

Como

*Ax* = *X−*1(] *− ∞*; *x*]) =



∅*, x <* 0

*{*(*Co, Co*)*}* 0 *≤ x <* 1

*{*(*Co, Co*)*,*(*Ca, Co*)*,*(*Co, Ca*)*}* 1 *≤ x <* 2 

Ω *x ≥* 2

´e sempre um acontecimento, *X* ´e uma vari´avel aleat´oria.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 29 / 117

Variavel aleat ´ oria ´

Exemplo de c´alculo de uma probabilidade:

*P*(*X* = 1) = *P*(*X−*1(*{*1*}*)) = *P*(*{*(*Ca, Co*)*,*(*Co, Ca*)*}*) = 12

Proposi¸c˜ao

*Se X*1*, X*2*, . . . , Xm s˜ao m vari´aveis aleat´orias e h* : R*m −→* R *´e uma fun¸c˜ao cont´ınua, ent˜ao*

*Y* = *h* (*X*1*, X*2*, . . . , Xm*)

*´e uma vari´avel aleat´oria.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 30 / 117

Func¸ao de distribuic¸ ˜ ao˜

Defini¸c˜ao (Fun¸c˜ao de distribui¸c˜ao)

*Define-se* fun¸c˜ao de distribui¸c˜ao *da vari´avel aleat´oria X como: F*(*x*) = *P*(*X ≤ x*) = *P*(*X−*1(] *− ∞, x*])) = *P*(*{ω* : *X*(*ω*) *≤ x}*)*, ∀x ∈* R*.*

Propriedades da fun¸c˜ao de distribui¸c˜ao:

1 lim *x→−∞F*(*x*) = 0 e lim *x→*+*∞F*(*x*) = 1;

2 *F* ´e cont´ınua `a direita, isto ´e, lim

*x→a*+*F*(*x*) = *F*(*a*);

3 *F* ´e n˜ao decrescente, isto ´e, se *x < y*, *F*(*x*) *≤ F*(*y*);

4 *P*(*X* = *x*) = *P*(*X ≤ x*) *− P*(*X < x*) = *F*(*x*) *− F*(*x−*), *∀x ∈* R.

| Nota: *F* (*x−*) = lim  *t→x−F* (*t*). |
| --- |

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 31 / 117

Variavel aleat ´ oria discreta ´

Considere o conjunto de pontos de descontinuidade de *F*, *D* = *{a ∈* R : *P* (*X* = *a*) *>* 0*} .*

Defini¸c˜ao (Vari´avel aleat´oria discreta)

*Uma v.a. X diz-se do* tipo discreto *ou simplesmente* discreta *se D ´e quanto muito numer´avel e*

*P* (*X ∈ D*) = 1*.*

*D ´e designado o* suporte *de X.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 32 / 117

Variavel aleat ´ oria discreta ´

Defini¸c˜ao (Fun¸c˜ao de probabilidade)

*Seja X uma v.a. discreta. Chama-se fun¸c˜ao de probabilidade (f.p.) de X `a fun¸c˜ao definida pelo conjunto dos valores de D e pelas respectivas probabilidades, isto ´e, por* (*x, px*) *onde x ∈ D e px* = *P*(*X* = *x*)*.*

Propriedades da fun¸c˜ao de probabilidade:

1 *P*(*X* = *x*) *>* 0, *∀x ∈ D*;

2

P

*x∈D*

*P*(*X* = *x*) = 1*.*

C´alculo de probabilidades:

X

| *P* (*X ∈ I*) = *P* (*X ∈ D ∩ I*) =  *P*(*X* = *x*)*,* para qualquer *I ⊆* R*.*  *x∈*(*D∩I*) |
| --- |

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 33 / 117

Variavel aleat ´ oria discreta ´

Considere a v.a. *X* com fun¸c˜ao de probabilidade. A fun¸c˜ao de probabilidade pode ser apresentada de v´arias formas distintas:

1

0 1 2

*X*

0*.*25 0*.*5 0*.*25

2

0*.*25*, x* = 0*,* 2

0*.*5*, x* = 1

0*,* outros valores de *x.*

3

*P*(*X* = *x*) =

 

*P*(*X* = *x*) =

2 *x*

0*.*25*, x* = 0*,* 1*,* 2

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 34 / 117

Func¸ao de uma vari ˜ avel aleat ´ oria ´ Func¸ao de uma vari ˜ avel aleat ´ oria discreta ´

Seja *X* uma v.a. discreta com suporte *DX* e *g* uma fun¸c˜ao real de vari´avel real, cujo dom´ınio cont´em *DX*.

Ent˜ao *Y* = *g*(*X*) ´e tamb´em uma vari´avel aleat´oria.

O suporte de *Y* ´e *DY* = *g*(*DX*).

A fun¸c˜ao de probabilidade de *Y* ´e

*P*(*Y* = *y*) = *P*(*X ∈ Ay*) = X

*P*(*X* = *x*)*, ∀y ∈ DY ,*

*x∈Ay*

onde *Ay* = *{x ∈ DX* : *g*(*x*) = *y}*.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 35 / 117

Func¸ao de uma vari ˜ avel aleat ´ oria ´ Func¸ao de uma vari ˜ avel aleat ´ oria discreta ´

Exemplo: Considere a v.a. *X* com fun¸c˜ao de probabilidade

*X*

0 1 2 0*.*25 0*.*5 0*.*25

e seja *Y* = (*X −* 1)2. E f´acil de verificar que ´ *DY* = *{*0*,* 1*}* e

*P*(*Y* = 0) = *P*(*X* = 1) = 0*.*5

*P*(*Y* = 1) = *P*(*X* = 0 *∨ X* = 2) = *P*(*X* = 0) + *P*(*X* = 2) = 0*.*5 Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 36 / 117

Parametros e Momentos ˆ

Defini¸c˜ao (Parˆametro)

*Corresponde a uma caracter´ıstica num´erica da vari´avel aleat´oria. Pode ser, por exemplo, uma constante presente na express˜ao anal´ıtica da fun¸c˜ao de probabilidade, fun¸c˜ao densidade ou fun¸c˜ao de distribui¸c˜ao.*

Defini¸c˜ao (Momentos)

*S˜ao parˆametros importantes que caracterizam a vari´avel aleat´oria. S˜ao usados para avaliar, por exemplo, a localiza¸c˜ao, dispers˜ao ou assimetria da vari´avel aleat´oria.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 37 / 117

Momentos

Defini¸c˜ao (Valor m´edio)

*O* valor m´edio *ou* valor esperado *ou* m´edia *de uma v.a. X ´e:*

*µ* = E(*X*) =

 

P

*x∈D*

*xP*(*X* = *x*) *se X ´e uma v.a.* discreta *com suporte D*;

+R*∞ −∞*

*xf*(*x*)*dx se X ´e uma v.a.* cont´ınua*,*

*se o somat´orio ou o integral for absolutamente convergente.*

Observa¸c˜oes:

O valor m´edio n˜ao ´e necessariamente um valor observ´avel de *X*;

Se considerarmos a distribui¸c˜ao de probabilidade correspondendo `a massa de um corpo, a m´edia corresponde ao seu centro de gravidade; E uma medida (ou parˆametro) de ´ localiza¸c˜ao de *X*.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 38 / 117

Momentos (exemplos)

1 Considere a v.a. *X* com fun¸c˜ao de probabilidade

*X*

0 1 2 0*.*25 0*.*5 0*.*25

Ent˜ao, o valor m´edio de *X* ´e

E(*X*) = 0 *× P*(*X* = 0) + 1 *× P*(*X* = 1) + 2 *× P*(*X* = 2) = 1 2 Considere a v.a. *X* com fun¸c˜ao de probabilidade

0 2 4

*X*

0*.*3 0*.*5 0*.*2

O valor m´edio de *X* ´e

E(*X*) = 0 *× P*(*X* = 0) + 2 *× P*(*X* = 2) + 4 *× P*(*X* = 4) = = 0 + 1 + 0*.*8 = 1*.*8

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 39 / 117

Momentos

Defini¸c˜ao

*Seja X uma v.a. e g uma fun¸c˜ao real. Ent˜ao o* valor m´edio *de g*(*X*) *´e:*



E(*g*(*X*)) =

P

*x∈D*

*g*(*x*)*P*(*X* = *x*) *se X ´e uma v.a.* discreta*;*



R +*∞*

*−∞ g*(*x*)*f*(*x*)*dx se X ´e uma v.a.* cont´ınua*;*

Observa¸c˜oes:

O valor m´edio s´o est´a definido se o somat´orio/integral for absolutamente convergente;

A existˆencia de *E*(*X*) n˜ao implica a existˆencia de *E*(*g*(*X*)). Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 40 / 117

Momentos (exemplos) Considere a v.a. *X* com fun¸c˜ao de probabilidade

*X*

0 2 4 0*.*3 0*.*5 0*.*2

o valor m´edio de *g*(*X*) = *X*2 ´e

E(*X*2) = 02 *× P*(*X* = 0) + 22 *× P*(*X* = 2) + 42 *× P*(*X* = 4) = = 0 *×* 0*.*3 + 4 *×* 0*.*5 + 16 *×* 0*.*2 = 5*.*2

o valor m´edio de *g*(*X*) = ln(1 + *X*) ´e

E(ln(1 + *X*)) = ln(1 + 0)*P*(*X* = 0) + ln(1 + 2)*P*(*X* = 2) + ln(1 + 4)*P*(*X* = 4) = = 0*.*871

o valor m´edio de *g*(*X*) = *X−*4

2´e

E( *X−*4

2) = 0*−*4

2 *× P*(*X* = 0) + 2*−*4

2 *× P*(*X* = 2) + 4*−*4

2 *× P*(*X* = 4) =

= *−* 2 *×* 0*.*3 *−* 1 *×* 0*.*5 + 0 *×* 0*.*2 = *−*0*.*6 *−* 0*.*5 = *−*1*.*1

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 41 / 117

Momentos

Proposi¸c˜ao

*Sejam X e Y vari´aveis aleat´orias, a e b, constantes reais. Ent˜ao:* E(*a*) = *a;*

E(*aX* + *b*) = *a*E(*X*) + *b;*

E(*X ± Y* ) = E(*X*) *±* E(*Y* )*;*

E (*g*(*X*) *± h*(*Y* )) = E (*g*(*X*)) *±* E (*h*(*Y* ))

Exemplo: o valor m´edio de *g*(*X*) = *X−*4

2´e

E( *X−*4

2) = E( 12*X −* 2) = 12E(*X*) *−* 2

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 42 / 117

Momentos: variancia & desvio padr ˆ ao˜

Defini¸c˜ao (Variˆancia e desvio padr˜ao)

*Seja X uma v.a. com valor m´edio µ. Define-se a* variˆancia *de X por*

*σ*2 = V(*X*) = E((*X − µ*)2)*.*

*A σ* =p*V* (*X*) *chamamos* desvio padr˜ao *da v.a. X.* Exemplo: Considere a v.a. *X* com fun¸c˜ao de probabilidade

0 2 4

*X*

0*.*3 0*.*5 0*.*2

A variˆancia de *X* ´e

V(*X*) = (0 *−* 1*.*8)2 *× P*(*X* = 0) + (2 *−* 1*.*8)2 *× P*(*X* = 2) + (4 *−* 1*.*8)2 *× P*(*X* = 4) = = (0 *−* 1*.*8)2 *×* 0*.*3 + (2 *−* 1*.*8)2 *×* 0*.*5 + (4 *−* 1*.*8)2 *×* 0*.*2 = 1*.*96

O desvio padr˜ao de *X* ´e *σ* =*√*1*.*96 = 1*.*4

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 43 / 117

Momentos: variancia & desvio padr ˆ ao˜

Proposi¸c˜ao

*Seja X ´e uma v.a., para a qual V* (*X*) *< ∞. Ent˜ao, V* (*X*) = E*X*2 *−* E2(*X*)*.*

Exemplo: Considere a v.a. *X* com fun¸c˜ao de probabilidade

*X*

0 2 4 0*.*3 0*.*5 0*.*2

A variˆancia de *X* ´e V (*X*) = E*X*2 *−* E2(*X*) = 5*.*2 *−* 1*.*82 = 1*.*96

Proposi¸c˜ao

*Seja X uma vari´avel aleat´oria, a e b, constantes reais. Ent˜ao:* V(*a*) = 0*;*

V(*aX* + *b*) = *a*2V(*X*)*;*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 44 / 117

Momentos: outros parametros relevantes ˆ

Defini¸c˜ao (Coeficiente de varia¸c˜ao)

*O Coeficiente de varia¸c˜ao de X, com suporte positivo ´e,* CV = *σµ.*

Defini¸c˜ao (Moda)

*A Moda, representada por mo, ´e o valor que maximiza a fun¸c˜ao de pro babilidade ou a fun¸c˜ao densidade de probabilidade, desde que seja ´unico.*

Exemplo: Considere a v.a. *X* com fun¸c˜ao de probabilidade

*X*

0 2 4 0*.*3 0*.*5 0*.*2

O Coeficiente de varia¸c˜ao de *X* ´e CV (*X*) = *√*1*.*96*/*1*.*8 = 7*/*9 = 0*.*778 e a moda ´e 2.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 45 / 117

Momentos: outros parametros relevantes ˆ Defini¸c˜ao (Coeficiente de assimetria)

*γ*1 =E((*X − µ*)3)

*σ*3*.*

0.30 0.25 0.20 0.15 0.10 0.05 0.00

γ1 = −0.47

∝

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

0.30

0.25

0.20

0.15

0.10

0.20

0.15

0.10

0.05

0.00

γ1 = 0.47

γ1 = 0

∝

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 46 / 117

Momentos: outros parametros relevantes ˆ Defini¸c˜ao (Coeficiente de achatamento ou kurtosis:) *γ*2 =E((*X − µ*)4)

*σ*4*.*

Nota: *A γ*2 *−* 3 *chamamos* excesso de kurtosis*.*

Exemplo: Considere a v.a. *X* com fun¸c˜ao de probabilidade

0 2 4

*X*

0*.*3 0*.*5 0*.*2

Temos

E((*X −* 1*.*8)3) = 0*.*384*,* E((*X −* 1*.*8)4) = 7*.*8352*,*

*γ*1 = 0*.*1399 *γ*2 = 2*.*0396

Nota: Podemos tamb´em calcular o numerador da f´ormula de *γ*1 e *γ*2 usando os resultados *E*((*X − µ*)3) = *E*(*X*3) *−* 3*µE*(*X*2) + 2*µ*3, *E*((*X − µ*)4) = *E*(*X*4) *−* 4*µE*(*X*3) + 2*µ*3 + 6*µ*2*E*(*X*2) *−* 3*µ*4

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 47 / 117

Par aleat´orio

Sejam *X*1*, X*2*, . . . , Xp p* vari´aveis aleat´orias. Ent˜ao X = (*X*1*, X*2*, . . . , Xp*) ´e um vector aleat´orio de dimens˜ao *p*. Vamos restringir-nos apenas aos vectores aleat´orios com dois elementos (*p* = 2), ditos pares aleat´orios, representados por (*X, Y* ).

Defini¸c˜ao (Par aleat´orio discreto)

(*X, Y* ) *´e um* par aleat´orio discreto *se e s´o se X e Y s˜ao vari´aveis aleat´orias discretas.*

*Ent˜ao, o conjunto (suporte)*

*D* = *{*(*x, y*) *∈* R2: *P*(*X* = *x, Y* = *y*) *>* 0*}*

*´e, quando muito, numer´avel e P*((*X, Y* ) *∈ D*) = 1*.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 48 / 117

Par aleat´orio

Defini¸c˜ao (Fun¸c˜ao de probabilidade conjunta)

*Seja* (*X, Y* ) *um* par aleat´orio discreto *tomando valores no conjunto D* = *{* (*x, y*) *∈* R2: *P*(*X* = *x, Y* = *y*) *>* 0 *}.*

*Chamamos* fun¸c˜ao de probabilidade conjunta *(f.p.c.) de* (*X, Y* ) *`a fun¸c˜ao:*

*P*(*X* = *x, Y* = *y*)*, ∀*(*x, y*) *∈* R*.*

Propriedades da fun¸c˜ao de probabilidade conjunta:

0 *≤ P*(*X* = *x, Y* = *y*) *≤* 1*, ∀*(*x, y*)

P P

(*x,y*)*∈D*

*P*(*X* = *x, Y* = *y*) = 1

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 49 / 117

Par aleat´orio

Exerc´ıcio: verifique se

*P*(*X* = *x, Y* = *y*) = *x* + 2*y*

24*, x* = *−*1*,* 1*, y* = 1*,* 2*,* 3*,*

´e uma fun¸c˜ao de probabilidade.

Observa¸c˜ao: Quando o conjunto *D* ´e finito e tem dimens˜ao pequena, podemos representar a fun¸c˜ao de probabilidade conjunta (f.p.c.) numa tabela.

Exemplo: Seja (*X, Y* ) um par aleat´orio discreto com a seguinte f.p.c.: *X \ Y* 0 1 2

0

| 1/4 = *P* (*X* = 0*, Y* = 0) 1/8 = *P* (*X* = 0*, Y* = 1) 0 = *P* (*X* = 0*, Y* = 2) 1/8 = *P* (*X* = 1*, Y* = 0) 1/8 = *P* (*X* = 1*, Y* = 1) 1/8 = *P* (*X* = 1*, Y* = 2) 0 = *P* (*X* = 2*, Y* = 0) 0 = *P* (*X* = 2*, Y* = 1) 1/4 = *P* (*X* = 2*, Y* = 2) |
| --- |

1

2

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 50 / 117

Par aleat´orio

C´alculo de probabilidades: Para qualquer *I ⊆* R2,

XX

| *P* ((*X, Y* ) *∈ I*) = *P* ((*X, Y* ) *∈* (*D ∩ I*)) =  *P*(*X* = *x, Y* = *y*)*.*  (*x,y*)*∈*(*D∩I*) |
| --- |

Defini¸c˜ao (fun¸c˜ao de probabilidade marginal)

*Dado um par aleat´orio discreto* (*X, Y* )*, definimos a* fun¸c˜ao de probabilidade marginal de *X como*

*P* (*X* = *x*) = X

*P* (*X* = *x, Y* = *y*)*,*

*y*

*e a* fun¸c˜ao de probabilidade marginal de *Y como*

*P* (*Y* = *y*) = X

*P* (*X* = *x, Y* = *y*)*.*

*x*

Nota: *Nos somat´orios anteriores, basta considerar valores x e y tais que* (*x, y*) *∈ D.* Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 51 / 117

Par aleat´orio

Defini¸c˜ao (Fun¸c˜ao de probabilidade condicional de *X* dado *Y* = *y* (fixo))

*P*(*X* = *x|Y* = *y*) = *P*(*X* = *x, Y* = *y*)

*P*(*Y* = *y*)*, se P*(*Y* = *y*) *>* 0*.*

De modo an´alogo, podemos definir a fun¸c˜ao de probabilidade condici onal de *Y* dado *X* = *x*.

Defini¸c˜ao (Independˆencia entre v.a.’s discretas)

*As v.a.’s X e Y dizem-se* independentes *se e s´o se,*

*P*(*X* = *x, Y* = *y*) = *P*(*X* = *x*)*P*(*Y* = *y*)*, ∀*(*x, y*) *∈* R2*.*

Nota: E suficiente verificar a defini¸c˜ao anterior para qualquer ´ (*x, y*) *∈ D*. Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 52 / 117

Par aleat´orio

Exemplo: Seja (*X, Y* ) um par aleat´orio discreto com a seguinte f.p.c.:

*X \ Y* 0 1 2

0 3/8

| 1/4 1/8 0  1/8 1/8 1/8 0 0 1/4 |
| --- |

1 3/8

2 1/4

3/8 1/4 3/8

1 Qual a probabilidade de *X* ser maior que *Y* ?

2 Calcule *P*(*X ≤* 1*, Y >* 0).

3 Determine a fun¸c˜ao de probabilidade de *X|Y* = 2 e calcule *E*(*X|Y* = 2).

4 *X* e *Y* s˜ao v.a.’s independentes? Justifique a sua resposta. Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 53 / 117

Momentos de vectores aleat´orios

Defini¸c˜ao

*Seja* (*X, Y* ) *um par aleat´orio e g* : R2 *→* R *uma fun¸c˜ao. Define-se o* valor m´edio *ou* valor esperado *ou* m´edia *de g*(*X, Y* ) *como:*



PP

*g*(*x, y*)*P*(*X* = *x, Y* = *y*) *se X e Y s˜ao*

*E*(*g*(*X, Y* )) =

(*x,y*)*∈D*



*v.a.’s discretas;*

+R*∞ −∞*

+R*∞ −∞*

*g*(*x, y*)*fX,Y* (*x, y*)*dxdy se X e Y s˜ao v.a.’s cont´ınuas;*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 54 / 117

Momentos de vectores aleat´orios

Covariˆancia

Defini¸c˜ao (Covariˆancia)

*Seja* (*X, Y* ) *um par aleat´orio. Define-se* covariˆancia *entre X e Y por:* Cov (*X, Y* ) = E [(*X −* E(*X*)) (*Y −* E(*Y* ))] *,*

Proposi¸c˜ao

*Caso exista a* Cov(*X, Y* )*, esta pode ser calculada atrav´es da f´ormula:* Cov(*X, Y* ) = E(*XY* ) *−* E(*X*)E(*Y* )*.*

Proposi¸c˜ao

*Se X e Y s˜ao* independentes*,* E(*XY* ) = E(*X*)E(*Y* ) *e* Cov(*X, Y* ) = 0*.* Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 55 / 117

Momentos de vectores aleat´orios

Covariˆancia

Interpreta¸c˜ao da Covariˆancia



Figura: Fonte: http://www.math.uah.edu/stat/expect/Covariance.png Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 56 / 117

Momentos de vectores aleat´orios

Covariˆancia

Proposi¸c˜ao

*Sejam X, Y e Z v.a.’s, a e b, constantes reais. Ent˜ao:*

Cov(*X, Y* ) = Cov(*Y, X*)*;*

Cov(*X, X*) = *V* (*X*)*;*

Cov (*X* + *Y, Z*) = Cov (*X, Z*) + Cov (*Y, Z*)*;*

Cov (*aX* + *b, Y* ) = *a*Cov (*X, Y* )*.*

Teorema

*Sejam X e Y vari´aveis aleat´orias. Ent˜ao,*

V(*X ± Y* ) = V(*X*) + V(*Y* ) *±* 2Cov(*X, Y* )

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 57 / 117

Momentos de vectores aleat´orios

Coeficiente de Correla¸c˜ao

Defini¸c˜ao (Coeficiente de correla¸c˜ao)

*Define-se o* coeficiente de correla¸c˜ao *de* (*X, Y* ) *por*

*ρ* (*X, Y* ) = Cov(*X, Y* )

~~p~~V (*X*) V (*Y* )*.*

Propriedades:

*−*1 *≤ ρ* (*X, Y* ) *≤* 1;

*|ρ* (*X, Y* )*|* = 1 se e s´o se *P* (*Y* = *a* + *bX*) = 1, sendo *a* e *b* constantes reais;

Se *X* e *Y* s˜ao v.a.’s independentes, *ρ*(*X, Y* ) = 0.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 58 / 117

Momentos de vectores aleat´orios

Coeficiente de Correla¸c˜ao

Interpreta¸c˜ao da Correla¸c˜ao

Figura: Fonte: https://www.mathsisfun.com/data/images/correlation-levels.gif

Observa¸c˜ao: Como regra emp´ırica, podemos considerar que existe forte rela¸c˜ao linear positiva (negativa) entre *X* e *Y* se *ρ*(*X, Y* ) *≥* 0*.*7 (*ρ*(*X, Y* ) *≤ −*0*.*7).

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 59 / 117

Distribuic¸ao Uniforme Discreta ˜

Defini¸c˜ao (Distribui¸c˜ao uniforme discreta)

*Dizemos que a vari´avel aleat´oria X segue uma distribui¸c˜ao* Uniforme Discreta *de parˆametro n e escrevemos X ∼ Unif*(*n*) *ou X ∼ U*(*n*)*, se a fun¸c˜ao de probabilidade de X ´e dada por:*

(

*n. . .*1*nou P*(*X* = *x*) = 1*n, x* = 1*, . . . , n.*

*X*

1 2 *. . . n*

1

*n*

1



Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 60 / 117

Distribuic¸ao Uniforme Discreta ˜

Proposi¸c˜ao

*Seja a v.a. X ∼ U*(*n*)*. Ent˜ao,*

*.*

Proposi¸c˜ao

*F*(*x*) =



0*, x <* 1

*k*

*n, k ≤ x < k* + 1*, k* = 1*, . . . , n −* 1 

1*, x ≥ n*

*Seja a v.a. X ∼ U*(*n*)*. Ent˜ao,*

2*, V* (*X*) = *n*2 *−* 1

*E*(*X*) = *n* + 1

12*.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 61 / 117

Distribuic¸ao Uniforme Discreta ˜

Exerc´ıcio: Seja *X* a vari´avel aleat´oria que representa

o n´umero de pontos que saem no lan¸camento de um

dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Temos ent˜ao, *X ∼ U*(6); 

Determine,

*E*(*X*) e *V* (*X*);

o coeficiente de assimetria;

a probabilidade de sair um n´umero maior ou igual

a 5.

Solu¸c˜ao: *E*(*X*) = 7*/*2 = 3*.*5, *V* (*X*) = (62 *−* 1)*/*12 = 35*/*12, *γ*1 = 0, *P* (*X ≥* 5) = 2*/*6 = 1*/*3, Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 62 / 117

Distribuic¸ao Hipergeom ˜ etrica ´

Exemplo

| Exemplo: |
| --- |

Num aqu´ario existem 9 peixes, dos quais 5 est˜ao saud´aveis (S) e os restantes 4 est˜ao doentes (D).

Considere a experiˆencia aleat´oria: extrac¸c˜ao ao acaso e sem reposi¸c˜ao de 3 peixes e registo do seu estado de sa´ude.

Associada a esta experiˆencia aleat´oria, considere a vari´avel aleat´oria

| *X* - n´umero de peixes saud´aveis na amostra extra´ıda de 3 peixes. |
| --- |

Determine a fun¸c˜ao de probabilidade de *X*.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 63 / 117

Distribuic¸ao Hipergeom ˜ etrica ´

Defini¸c˜ao (Distribui¸c˜ao Hipergeom´etrica)

*Considere:*

*uma popula¸c˜ao com N elementos;*

*M elementos possuem determinada caracter´ıstica e os restantes* (*N − M*) *n˜ao a possuem (*dicotomia*);*

*a experiˆencia aleat´oria que consiste em seleccionar ao acaso e* sem reposi¸c˜ao *n elementos (amostra).*

*Considere a v.a. X - no de elementos com a caracter´ıstica, na amostra seleccionada sem reposi¸c˜ao. Esta v.a. X tem fun¸c˜ao de probabilidade,*

*P*(*X* = *k*) =

*M k*

*N−M n−k*

*, max*(0*, M* + *n − N*) *≤ k ≤ min*(*M, n*)*.*

*N*

*n*

*e diz-se ter distribui¸c˜ao* Hipergeom´etrica *de parˆametros* (*N, M, n*) *e usamos a nota¸c˜ao X ∼ H*(*N, M, n*)*.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 64 / 117

Distribuic¸ao Hipergeom ˜ etrica ´

Observa¸c˜ao: Considere a v.a. *X ∼* H(*N, M, n*). Ent˜ao: *E*(*X*) = *nMN*; *V* (*X*) = *nM*

*N*~~2~~(*N−*1) (*N − M*)(*N − n*);

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 65 / 117

Distribuic¸ao de Bernoulli ˜

Defini¸c˜ao (Prova de Bernoulli)

*Experiˆencia aleat´oria com dois poss´ıveis resultados (“Sucesso” ou “Insucesso”).*

Defini¸c˜ao (Distribui¸c˜ao de Bernoulli)

*Seja X a v.a. que toma o valor* 1 *se o resultado da experiˆencia ´e “Sucesso” e* 0 *se ´e “Insucesso”, traduzindo a* dicotomia *dos resultados. Denotando p* = *P*(“*Sucesso*”) *>* 0*, a fun¸c˜ao de probabilidade de X ´e:*

*X*

0 1

1 *− p p,* 0 *< p <* 1

*Dizemos que X segue uma distribui¸c˜ao de* Bernoulli *de parˆametro p e escrevemos X ∼ Ber*(*p*)*.*

Proposi¸c˜ao

*Seja a v.a. X ∼ Ber*(*p*)*. Ent˜ao: E*(*X*) = *p e V* (*X*) = *p*(1 *− p*)*.* Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 66 / 117

Distribuic¸ao Binomial ˜

Exemplo

Exerc´ıcio: Num determinado percurso de avi˜ao, a probabilidade de uma pessoa qualquer que a´ı viaje pedir uma refei¸c˜ao vegetariana ´e de 0.2. Supondo que em determinado dia viajam 10 pessoas no avi˜ao, calcule a probabilidade de:

(a) Ningu´em pedir refei¸c˜ao vegetariana.

(b) Todos pedirem refei¸c˜ao vegetariana.

(c) Pelo menos uma pedir refei¸c˜ao vegetariana.

(d) Duas pessoas pedirem a refei¸c˜ao vegetariana.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 67 / 117

Distribuic¸ao Binomial ˜

Defini¸c˜ao (Distribui¸c˜ao Binomial)

*Considere uma sucess˜ao de provas de Bernoulli independentes, onde em cada prova a probabilidade de “sucesso”, p, ´e constante. A v.a.*

*X* = *“n´umero de sucessos em n provas de Bernoulli”*

*segue uma distribui¸c˜ao* Binomial *de parˆametros n e p, e escrevemos X ∼ B*(*n, p*)*. A fun¸c˜ao de probabilidade ´e:*

*P*(*X* = *k*) =

*n k*

*pk*(1 *− p*)*n−k, k* = 0*,* 1*, . . . , n* 0 *< p <* 1

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 68 / 117

Distribuic¸ao Binomial ˜

**P(X=k)**

0.30

Bin(20, 0.15) Bin(20, 0.5) ● Bin(20, 0.7)

0.25

0.20 0.15

**P(X=k)**

Bin(50, 0.15) Bin(50, 0.5) ● Bin(50, 0.7)

0.20 0.15 0.10 0.05 0.00

●

●

●

●

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●●

●

●

●

●

●

●

0.10 0.05 0.00

●

●

●

●

●

●

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

● ●

●

●

●

●

●

●

● ● ● ● ● ●

0 5 10 15 20 k

Proposi¸c˜ao

*Considere a v.a. X ∼ B*(*n, p*)*. Ent˜ao,*

0 10 20 30 40 50 k

*E*(*X*) = *np e V* (*X*) = *np*(1 *− p*);

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 69 / 117

Distribuic¸ao Binomial ˜

Teorema (Propriedade aditiva da distribui¸c˜ao Binomial)

*Sejam X*1*, X*2*, . . . , Xm, m v.a.’s independentes tais que Xi ∼ B*(*ni, p*)*, i* = 1*, . . . , m. Ent˜ao, a* soma

*Sm* = *X*1 + *X*2 + *. . .* + *Xm* =X*m*

*Xi*

*i*=1

*tem tamb´em distribui¸c˜ao Binomial, isto ´e,*

*Sm* =X*m i*=1

*Xi ∼ B*(*n*1 + *. . .* + *nm, p*)*.*

Diferen¸ca entre as distribui¸c˜oes Hipergeom´etrica e Binomial Hipergeom´etrica: Sucessivas extrac¸c˜oes n˜ao s˜ao independentes; Binomial: Sucessivas extrac¸c˜oes s˜ao independentes;

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 70 / 117

Aproximac¸ao da Hipergeom ˜ etrica pela Binomial ´

Exemplo: Num lago com *N* = 1000 peixes, *M* = 50 est˜ao saud´aveis e os res tantes *N − M* = 950 n˜ao est˜ao saud´aveis.

Seja *X* o n´umero de peixes saud´aveis numa amostra de *n* = 30 peixes, ex tra´ıdos ao acaso sem reposi¸c˜ao.

Ent˜ao *X ∼ H*(1000*,* 50*,* 30)

Seja *Y* o n´umero de peixes saud´aveis numa amostra de *n* = 30 peixes, ex tra´ıdos ao acaso com reposi¸c˜ao.

Ent˜ao *Y ∼ B*(30*,* 0*.*05)

50

4

950 26

*P*(*Y* = 4) =

30

0*.*0540*.*9526 = 0*.*04514

*P*(*X* = 4) =

1000 30

= 0*.*04386

4

Aproxima¸c˜ao da distribui¸c˜ao Hipergeom´etrica pela Binomial: Seja *X ∼ H*(*N, M, n*). Se *nN ≤* 0*.*1 (o tamanho da amostra for muito pequeno, em rela¸c˜ao ao tamanho da popula¸c˜ao), podemos aproximar a fun¸c˜ao de probabilidade (f.p.) de *X* pela f.p. da distribui¸c˜ao *B*(*n, p* = *M/N*).

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 71 / 117

Distribuic¸ao Geom ˜ etrica ´

Exemplo

42 A probabilidade de um atirador acertar no alvo ´e 0.6. Calcule a probabilidade de:

(a) em cinco tiros, acertar trˆes.

(b) acertar pela terceira vez ao quinto tiro.

(c) serem necess´arios exactamente 10 tiros para acertar um.

(d) necessitar de, pelo menos, 4 tiros para acertar 2.

Solu¸c˜ao: 0.3456, 0.20736, 0.000157, 0.352

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 72 / 117

Distribuic¸ao Geom ˜ etrica ´

Defini¸c˜ao (Distribui¸c˜ao Geom´etrica)

*Considere as seguintes condi¸c˜oes:*

1 *Realizamos uma experiˆencia aleat´orias com dois poss´ıveis resultados:*

*sucesso com probabilidade p (constante);*

*insucesso com probabilidade* 1 *− p;*

2 *Repetimos a experiˆencia aleat´oria at´e ocorrer o primeiro sucesso;* 3 *Os resultados das experiˆencias s˜ao mutuamente independentes; Ent˜ao, a v.a.*

*X* = *“n´umero de experiˆencias necess´arias at´e ocorrer o primeiro sucesso” tem* distribui¸c˜ao Geom´etrica *de parˆametro p, e escrevemos X ∼ G*(*p*)*.*

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 73 / 117

Distribuic¸ao Geom ˜ etrica ´

Defini¸c˜ao (Fun¸c˜ao de probabilidade)

*A fun¸c˜ao de probabilidade ´e:*

| *P*(*X* = *x*) = *p*(1 *− p*)*x−*1*, x* = 1*,* 2*, . . . ,* 0 *< p <* 1 |
| --- |

Proposi¸c˜ao (Fun¸c˜ao de distribui¸c˜ao)

*A fun¸c˜ao de distribui¸c˜ao ´e:*

| [*x*]  *F*(*x*) = *P*(*X ≤ x*) = X  *P*(*X* =*j*) = 1 *−* (1 *− p*)[*x*]*, x ≥* 1*,* 0*< p<*1*.*  *j*=1 |
| --- |

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 74 / 117

Distribuic¸ao Geom ˜ etrica ´ **G(0.25)**

**G(0.5)**

) k

=

X(

P

5

5

.

.

0

0

4

4

.

.

0

0

3

3

.

.

)

0

0

k

=

X

(

P

2

2

.

.

0

0

1

1

.

.

0

0

0

0

.

.

0 5 10 15 20

0

0

x

0 5 10 15 20 x

Figura: Fun¸c˜ao de probabilidade de uma v.a. *G*(*p*), com *p* = 0*.*25 (esquerda) e *p* = 0*.*5 (direita)

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 75 / 117

Distribuic¸ao Geom ˜ etrica ´

Proposi¸c˜ao

*Considere a v.a. X ∼ G*(*p*)*. Ent˜ao,*

*E*(*X*) = 1*p, V* (*X*) = 1 *− p*

*p*2

Como os resultados das experiˆencias s˜ao independentes, a contagem do n´umero de experiˆencias necess´arias at´e ao pr´oximo sucesso pode ser re come¸cada em qualquer experiˆencia, sem que isso altere a distribui¸c˜ao da vari´avel aleat´oria.

Proposi¸c˜ao (Propriedade da falta de mem´oria)

*Para qualquer k > v, P*(*X > k|X > v*) = *P*(*X > k − v*)*.* Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 76 / 117

Distribuic¸ao de Poisson ˜

Defini¸c˜ao: Processo de Poisson

Seja *X* a vari´avel aleat´oria que conta o n´umero de ocorrˆencias de um aconte cimento num dado intervalo de tempo4 de dura¸c˜ao *t* . Temos um processo de Poisson de parˆametro *λ >* 0, quando:

1 A probabilidade *p* de ocorrer exactamente um acontecimento num intervalo de amplitude arbitrariamente pequena *d* ´e proporcional `a sua dura¸c˜ao, isto ´e, *p* = *λd*;

2 A probabilidade de ocorrer mais do que um acontecimento num intervalo de amplitude arbitrariamente pequena ´e aproximadamente igual a zero;

3 O n´umero de acontecimentos que ocorrem em dois intervalos disjuntos s˜ao independentes.

4 O n´umero de ocorrˆencias em dois intervalos com a mesma dura¸c˜ao, tˆem a mesma distribui¸c˜ao.

4podemos considerar outra unidade de medida: ´area, comprimento, volume, etc. Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 77 / 117

Distribuic¸ao de Poisson ˜

Fun¸c˜ao de probabilidade do processo de Poisson

Seja *X*(*t*) o n´umero de ocorrˆencias de um acontecimento num dado in tervalo de tempo de dura¸c˜ao *t*. Ent˜ao:

*P*(*X*(*t*) = *x*) = *e−λt*(*λt*)*x*

*x*!*, x* = 0*,* 1*,* 2*, . . . , λ >* 0*.*

Nota:

Num processo de Poisson, os acontecimentos acorrem a uma taxa m´edia *λ*, por unidade de tempo.

*E*(*X*(*t*)) = *λt*, *V* (*X*(*t*)) = *λt*.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 78 / 117

Distribuic¸ao de Poisson ˜

Exemplo (p. 47): Num processo de fabrica¸c˜ao de placas de vidro produzem-se pequenas bolhas que se distribuem aleatoriamente pelas pla cas, com uma densidade m´edia de 0.4 bolhas/*m*2. Admitamos que *X*(*t*) regista o n´umero de bolhas observadas em placas com *t m*2e que *X*(*t*) ´e um processo de Poisson de parˆametro *λ* = 0*.*4 bolhas/*m*2.

Determine a probabilidade de, numa placa com 4*.*5*m*2, haver pelo menos uma bolha.

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 79 / 117

Distribui¸c˜ao de Poisson

Distribui¸c˜ao de Poisson

A vari´avel aleat´oria *X* segue uma distribui¸c˜ao de Poisson de parˆametro *λ*, e escrevemos *X ∼ P*(*λ*), se a fun¸c˜ao de probabilidade de *X* ´e:

*P*(*X* = *x*) = *e−λ λx*

*x*!*, x* = 0*,* 1*,* 2*, . . . , λ >* 0*.*

Teorema (Propriedade aditiva da distribui¸c˜ao de Poisson)

*Sejam X*1*, X*2*, . . . , Xn vari´aveis aleat´orias* independentes *com distribui¸c˜ao Poisson, Xi ∼ P*(*λi*)*, i* = 1*, . . . , n. Ent˜ao,*

*Sn* =X*n i*=1

*Xi ∼ P*(*λ*1 + *. . .* + *λn*)

Frederico Caeiro ( - Universidade Nova de Lisboa) 80 / 117