FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta

Segundo Teste – 5 de Maio de 2018

[Cotação] **Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.**

1. Considere a aplicação $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definida por $f(n) = (-1)^n + n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

[2,0] (a) Prove que $\forall m, n \in \mathbb{N} \;\; f(m) = f(n) \;\Rightarrow\; m = n$.

[2,0] (b) Indique um conjunto X tal que $X \subseteq \mathbb{N}$ e um conjunto Y tal que $Y \subseteq \mathbb{N}_0$ de forma a que $g : X \longrightarrow Y$ definida por $g(x) = f(x)$, para todo $x \in X$ é aplicação bijectiva.

[1,5] (c) Determine $f(\{2p, 2p+1\})$, para $p \in \mathbb{N}$.

[1,5] (d) Determine um conjunto Y tal que $Y \subseteq \mathbb{N}_0$ e $f^{-1}(Y) = \emptyset$.

2. Sejam X, Y e Z conjuntos, $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ aplicações arbitrárias. Indique, justificando, o valor lógico das afirmações seguintes:

[1,5] (a) Se $g \circ f$ é aplicação injectiva então g é aplicação injectiva.

[1,5] (b) Se $g \circ f$ é aplicação sobrejectiva então g é aplicação sobrejectiva.

[2,5] **3.** Considere a aplicação $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}$ definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 \;\; f(n) = 2n + 1$.

4. Considere o conjunto Q das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ da forma $0101\ldots01$, ou seja, palavras binárias não vazias, a iniciar em 0, a terminar em 1 e com os valores 0 e 1 alternados.

[2,0] (a) Defina indutivamente o conjunto Q.

[1,5] (b) Usando as regras de inferência do conjunto Q, prove que $010 \notin Q$.

[2,5] (c) Indique equações que definam recursivamente a função $f : Q \longrightarrow \{1, 2\}$ tal que

$$f(w) = \begin{cases} 1, & \text{se o número de ocorrências de 0 na palavra } w \text{ é ímpar} \\ 2, & \text{se o número de ocorrências de 0 na palavra } w \text{ é par.} \end{cases}$$

[1,5] (d) Prove que as equações obtidas na alínea anterior definem uma função.

Fim

1. A aplicação f é tal que $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ e $f(n) = (-1)^n + n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Então se $n, m \in \mathbb{N}$ verificam $f(n) = f(m)$, temos que $(-1)^n + n = (-1)^m + m$. Ou seja, $((-1)^n - (-1)^m) + n = m$.

Se ambos n e m forem pares ou ímpares, porque $((-1)^n - (-1)^m) = 0$, temos que $n = m$.

Se n for par e m ímpar, ou n for ímpar e m par então $((-1)^n - (-1)^m) = 2$ ou $((-1)^n - (-1)^m) = -2$. Mas isto implica que $2 + n = m$ ou $n = m + 2$, o que é impossível pois um deles é par e o outro ímpar.

Logo, $n = m$.

(b) Se considerarmos $X = \mathbb{N}$ e $Y = Im\ f$, sendo $g(x) = f(x)$ para todo o $x \in X$, pela alínea anterior sabemos que g é injectiva. Por definição de sobrejectividade, $Im\ g = Im\ f = Y$, g é sobrejectiva. Portanto, bijectiva.

(c) Pela maneira como f está definida

$$f(\{2p, 2p+1\}) = \{f(2p),\ f(2p+1)\} = \{(-1)^{2p} + 2p,\ (-1)^{2p+1} + 2p + 1\} = \{2p+1,\ 2p\}.$$

(d) Consideremos $Y = \{1\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Ora $f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{N}\ :\ f(x) \in Y\} = \emptyset$ pois, pela definição de f, $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ uma vez que para que $f(n) = 1$ teríamos de ter $n = 0 \notin \mathbb{N}$.

2. Sejam X, Y e Z conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ aplicações arbitrárias.

(a) A afirmação é falsa como se pode verificar através do seguinte exemplo:

$$\text{Sejam } X = \{1, 2\},\ Y = \{a, b, c\},\ Z = \{x, y\},\quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & y \end{pmatrix}.$$

Assim, por definição de função composta, temos que $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é dada por

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}.$$

A função $g \circ f$ é injectiva visto $g(f(1)) \neq g(f(2))$. No entanto, a função g não é injectiva pois $g(b) = g(c) = y$ e $b \neq c$.

(b) A afirmação é verdadeira. Temos que $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é uma função sobrejectiva, ou seja,

$$\forall z \in Z\ \ \exists x \in X : g(f(x)) = z.$$

Queremos provar que g é função sobrejectiva, ou seja,

$$\forall z \in Z\ \ \exists y \in Y : g(y) = z.$$

Seja $z \in Z$ arbitrário. Ora

$$\begin{aligned} \exists x \in X : g(f(x)) = z \quad &\Rightarrow \quad \text{(visto } g \circ f \text{ ser sobrejectiva)} \\ \exists y \in Y : f(x) = y\ \wedge\ g(f(x)) = z \quad &\Rightarrow \quad \text{(visto } f \text{ ser função)} \\ \exists y \in Y : g(y) = z. \end{aligned}$$

Dado $z \in Z$ ser arbitrário, concluímos que $\forall z \in Z\ \exists y \in Y : g(y) = z$, ou seja, g é sobrejectiva.

3. A aplicação $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}$ é definida recursivamente por $f(0) = 1$ e $f(n+1) = 2 + f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Vejamos que $f(n) = 2n + 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$,

isto é,

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 \ : \ f(n) = 2n + 1\} = \mathbb{N}_0.$$

Provemos que $S = \mathbb{N}_0$ utilizando o Princípio de Indução.

(Base de Indução) $0 \in S$ pois $f(0) = 1$ e $2 \times 0 + 1 = 1 = f(0)$.

(Hipótese de Indução) Suponhamos que para $n \in \mathbb{N}$ se tem $f(n) = 2n + 1$ isto é, $n \in S$.

Vejamos que $n + 1 \in S$. Como $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2 + f(n) && \text{por definição} \\ &= 2 + 2n + 1 && \text{por hipótese de indução} \\ &= 2(n+1) + 1 \end{aligned}$$

donde $n + 1 \in S$.

Assim, pelo Princípio de Indução, $S = \mathbb{N}_0$ e, portanto, $f(n) = 2n + 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

4. (a) O conjunto Q define-se indutivamente por:

Axioma: $01 \in Q$

Regra: $w \in Q \Rightarrow conc_1\big(conc_0(w)\big) \in Q$

(b) Regras de inferência do conjunto Q: $\dfrac{}{01 \in Q}$ e $\dfrac{w \in Q}{conc_1\big(conc_0(w)\big) \in Q}$.

Pelas regras de inferência, toda a palavra de Q obtém-se da palavra 01 concatenando à direita um certo número de vezes a palavra 01. Logo os elementos de Q são palavras de comprimento par. Como 010 tem comprimento 3, concluímos que $010 \notin Q$.

(c) A aplicação f define-se recursivamente por:

① $f(01) = 1$

② $f\big(conc_1\big(conc_0(w)\big)\big) = 3 - f(w), \ \forall w \in Q$

(d) Consideremos as equações ① e ② da alínea anterior. Provemos por indução estrutural sobre Q que:

$$\forall w \in Q, \ \underbrace{\exists^1 y \in \{1, 2\} : f(w) = y}_{P(w)}.$$

$\boldsymbol{P(01)}$ **:**

Por ①, temos $f(01) = 1$. Como $01 \neq conc_1\big(conc_0(w)\big)$, para todo o $w \in Q$, concluímos que $y = 1$ é o único elemento de $\{1, 2\}$ associado a 01 por f.

$\boldsymbol{\forall w \in Q, \big[\underbrace{P(w)}_{\text{hipótese}} \Rightarrow \underbrace{P\big(conc_1(conc_0(w))\big)}_{\text{tese}} \big]}$:

Seja $w \in Q$ arbitrário.

Suponhamos, por hipótese, que existe um único $y \in \{1, 2\}$ tal que $f(w) = y$. Provemos que existe um único $z \in \{1, 2\}$ tal que $f\big(conc_1(conc_0(w))\big) = z$.

Então

$$f\big(conc_1(conc_0(w))\big) \underset{②}{=} 3 - f(w) \underset{\text{hipótese}}{=} 3 - y.$$

Consideremos $z = 3 - y$. Se $y = 1$ então $z = 3 - 1 = 2$; se $y = 2$ então $z = 3 - 2 = 1$. Logo $z \in \{1, 2\}$. A unicidade de z resulta do facto de y ser único.

Logo, por indução estrutural,

$$\left.\begin{array}{l} P(01) \\ \forall w \in Q,\ \big[P(w) \Rightarrow P\big(conc_1(conc_0(w))\big)\big] \end{array}\right\} \Rightarrow \forall w \in Q, P(w).$$