FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta
Segundo Teste – 4 de Maio de 2016

[Cotação] ***Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.***

[3,0] **1.** Considere a sucessão de números reais dada pela expressão

$$\begin{cases} u_0 = 2 \quad u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, \ \text{para } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre que $u_n = 1 + 2^n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

Mude de Folha

2. Seja F o conjunto dos números naturais cuja divisão por 3 dá resto 1.

[2,0] (a) Escreva as regras de inferência para o conjunto F.

[1,5] (b) Usando as regras de inferência obtidas na alínea anterior, prove que $7 \in F$.

Mude de Folha

3. Considere o subconjunto de números naturais $\Sigma = \{1, 2\}$. Seja $\mathbb{W}_2$ o conjunto das palavras sobre Σ.

[1,5] (a) Defina indutivamente $\mathbb{W}_2$.

[2,0] (b) Indique equações que definam recursivamente a função $f : \mathbb{W}_2 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ tal que

$$f(w) = \begin{cases} 0 \text{ se } w \text{ tem um número ímpar de 2's} \\ 1 \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

[2,5] (c) Prove que as seguintes equações $par(w) = \begin{cases} par(\epsilon) = 1 \\ par(conc_1(w)) = 1 - par(w), & \forall w \in \mathbb{W}_2 \\ par(conc_2(w)) = 1 - par(w), & \forall w \in \mathbb{W}_2 \end{cases}$

definem uma função $par : \mathbb{W}_2 \longrightarrow \mathbb{N}_0$.

Mude de Folha

4. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples com 26 arcos. Sabendo que G tem 4 vértices de grau 5 e todos os restantes vértices têm grau 4, determine:

[2,5] (a) O número de vértices de G;

[0,5] (b) O número de vértices de G com grau 4.

Mude de Folha

5. Considere a sequência de inteiros $(7, 7, 2, 2, 2, 2, 2, k)$ com $k \in \mathbb{N}_0$.

[2,0] (a) Justifique que, para $k = 0$ a sequência dada não é gráfica.

[2,5] (b) Usando o teorema das Sequências Gráficas, verifique que, para $k = 2$ a sequência dada é gráfica. Indique um grafo simples que a tenha como sequência de graus.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Matemática Discreta
Segundo Teste – 4 de Maio de 2016
Uma resolução com notas explicativas

1. Consideremos $S = \{n \in \mathbb{N}_0 : u_n = 1 + 2^n\}$ e demonstremos, usando o segundo princípio de indução matemática, que $S = \mathbb{N}_0$.

n=0 $u_0 = 2 = 1 + 2^0 = 1 + 1 = 2$, então $0 \in S$.

n=1 $u_1 = 3 = 1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$, então $1 \in S$.

$n \geq 1$

Hipótese de Indução: $\forall t \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tem-se $t \in S$, isto é, $u_t = 1 + 2^t$.

Queremos mostrar que, $n + 1 \in S$, ou seja, que $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$.

Quando $n \geq 1$ tem-se $n+1 \geq 2$ e, portanto, $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$. Como $n \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $n - 1 \in \{0, 1, \ldots, n\}$, podemos usar a hipótese de indução.

Assim vem

$$\begin{aligned} u_{n+1} =& 3u_n - 2u_{n-1} = 3(1 + 2^n) - 2(1 + 2^{n-1}) = \\ =& 3 + 3 \times 2^n - 2 - 2 \times 2^{n-1} = 1 + 3 \times 2^n - 2 \times 2^n \times 2^{-1} = \\ =& 1 + 2^n(3 - 1) = 1 + 2^n \times 2 = 1 + 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Como $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$ concluimos que $n + 1 \in S$ e, pelo segundo princípio de indução matemática, $S = \mathbb{N}_0$, logo $u_n = 1 + 2^n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

2. (a) O primeiro natural cuja divisão por 3 dá resto 1 é o 1. Assim, podemos definir F indutivamente da seguinte forma:

Axioma: $1 \in F$

Regra: $x \in F \Rightarrow suc(suc(suc(x))) \in F$.

Deste modo as regras de inferência são:

$$\frac{}{1 \in F} \qquad \frac{x \in F}{suc(suc(suc(x))) \in F}.$$

(b)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{1 \in F}}{suc(suc(suc(1))) \in F}}{suc(suc(suc(suc(suc(suc(1)))))) \in F}$$

onde $suc(suc(suc(suc(suc(suc(1)))))) = 7$.

3. (a) Para definir indutivamente um conjunto necessitamos de axiomas e regras. Neste caso, necessitaremos de um axioma e duas regras que são:

Axioma: $\epsilon \in \mathbb{W}_2$;

Regra 1: $((w \in \mathbb{W}_2) \Rightarrow conc_1(w) \in \mathbb{W}_2), \forall w \in \mathbb{W}_2$

Regra 2: $((w \in \mathbb{W}_2) \Rightarrow conc_2(w) \in \mathbb{W}_2), \forall w \in \mathbb{W}_2$

(b) A função $f : \mathbb{W}_2 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ pode ser definida recursivamente da seguinte forma:

$$f(w) = \begin{cases} f(\epsilon) = 1 \\ f(conc_1(w)) = f(w), & \forall w \in \mathbb{W}_2. \\ f(conc_2(w)) = 1 - f(w), \end{cases}$$

(c) Provemos que f é uma função.

Seja
$$R = \{w \in \mathbb{W}_2 : \exists^1 n \in \mathbb{N}_0, f(w) = n\}.$$

Por indução estrutural provemos que $R = \mathbb{N}_0$.

(Elementos básicos) ϵ é um elemento básico de $\mathbb{W}_2$. Atendendo à equação $f(\epsilon) = 1$, existe um único elemento de $\mathbb{N}_0$ (o um) que é igual a $f(\epsilon)$. Logo $\epsilon \in R$.

(Regras) As regras de $\mathbb{W}_2$ são $\frac{w\in\mathbb{W}_2}{conc_1(w)\in\mathbb{W}_2}$ e $\frac{w\in\mathbb{W}_2}{conc_2(w)\in\mathbb{W}_2}$

(Hipótese de Indução) $w \in R$, isto é, existe um único natural p tal que $f(w) = p$.

- Vejamos que $\frac{w\in\mathbb{W}_2}{conc_1(w)\in\mathbb{W}_2}$ é uma R-regra.
  Como $f(conc_1(w)) = 1 - f(w)$ então existe um único elemento de $\mathbb{N}_0$ $(r = 1 - p)$ tal que $f(conc_1(w)) = r$.
  Logo $conc_1(w) \in R$.
- Vejamos que $\frac{w\in\mathbb{W}_2}{conc_2(w)\in\mathbb{W}_2}$ é uma R-regra.
  Como $f(conc_2(w)) = 1 - f(w)$ então existe um único elemento de $\mathbb{N}_0$ $(r = 1 - p)$ tal que $f(conc_2(w)) = r$.
  Logo $conc_2(w) \in R$.

Assim, pelo Princípio de Indução Estrutural, $R = \mathbb{W}_2$ e, portanto, f é uma função.

4. (a) Seja $G = (X, U)$. Consideremos os conjuntos $X_4 = \{x \in X : d_G(x) = 4\}$ e $X_5 = \{x \in X : d_G(x) = 5\}$. Seja n o número de vértices do grafo G.Atendendo ao enunciado podemos afirmar que $|X_5| = 4$, $|X_4| = n - 4$ e $X = X_4 \dot{\cup} X_5$. Pelo Teorema do aperto de Mãos temos
$$2m = \sum_{x\in X} d_G(x) = \sum_{x\in X_5} 5 + \sum_{x\in X_4} 4 = 4 \times 5 + (n-4) \times 4$$
$$20 + 4(n-4) = 2 \times 26 \Leftrightarrow 20 + 4n - 16 = 52 \Leftrightarrow 4n = 48 \Leftrightarrow n = 12.$$

Assim o número de vértices de G é 12.

(b) O número de vértices de grau 4 é dado pela expressão $n - 4$ e portanto é $12 - 4 = 8$.

5. (a) Atendendo a que, para $k = 0$ a sequência dada é $(7, 7, 2, 2, 2, 2, 2, 0)$, tal sequência não pode ser gráfica.

Se esta sequência fosse a sequência de graus de um grafo simples, tal correspoderia a um grafo com 8 vértices com dois vértices de grau 7. A existência de dois vértices de grau $n-1$ num grafo simples, obriga a que todos os restantes vértices tenham, pelo menos grau 2.

Uma vez que um elemento desta sequência é zero, não existe nenhum grafo simples que a tenha como sequência de graus.

(b) Para $k = 0$ a sequência dada é $(7, 7, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. Apliquemos o Teorema das Sequências Gráficas a esta sequência.

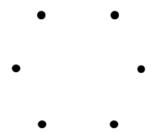
$7\ \underline{7\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2}$

$6\ \underline{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}$

$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$

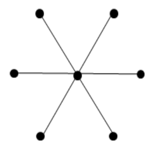
A sequência $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ é gráfica pois corresponde ao grafo

pelo Teorema das sequências Gráficas se $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ gráfica, então também é gráfica a sequencia inicial $(7, 7, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.



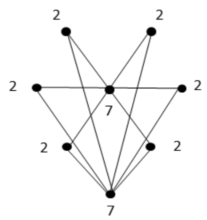
Podemos construir o grafo correspondente à sequência inicial acrescentando sucessivamente:

· Um vértice de grau 6 que dará origem ao grafo



cuja sequência de graus é $(6, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

· Um vértice de grau 7 que corresponde ao grafo



cuja sequência de graus é a inicialmente dada $(7, 7, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.