FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta
Primeiro Teste – 8 de Abril de 2016

[Cotação] Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

[4,0] **1.** Considere os conjuntos $\mathcal{A} = \{\{\{1\},\{1,2,3\}\},\{\{1,2\},\{1\}\}\}$ e $B = \{\emptyset, b\}$.

Determine:

(a) $\mathcal{P}(B)$ (b) $\bigcap \mathcal{A}$ (c) $\bigcup \mathcal{A}$ (d) $\mathcal{A} \times B$.

2. Sejam A e B subconjuntos de um conjunto S.

[1,5] (a) Mostre através de uma tabela de verdade, que $(B \setminus A) \cup A = A \cup B$.

[1,5] (b) Mostre formalmente que se $A \cap B = \emptyset$ então $A \cup B^c \subseteq B^c$.

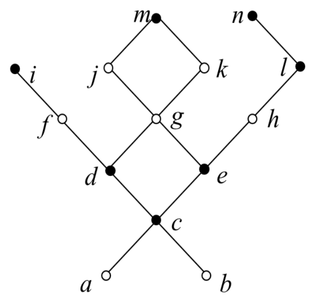
3. Sobre o conjunto $X = \{1,2,3,4,5\}$, considere as relações $R = \{(1,2),(2,1),(2,4),(3,5)\}$ e $S = \{(1,3),(1,5),(2,3),(4,1),(4,3),(5,1)\}$.

[1,0] (a) Indique um elemento de X tal que $x \in \mathrm{Dom}(R)$ e $x \notin \mathrm{Im}(R)$.

[1,0] (b) Indique, justificando, dois elementos de R^{-1} e dois elementos de $S \circ R$.

[1,0] (c) Indique, justificando, se S é reflexiva, irreflexiva, simétrica ou anti-simétrica.

4. Considere o conjunto $X = \{a,b,c,\ldots,l,m,n\}$ e a relação de ordem parcial, $\leq$, sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



[2,0] (a) Indique, se existirem, os elementos mínimo, máximo, minimais e maximais, do subconjunto $A = \{c,d,e,i,l,m,n\}$ *(vértices escuros)* do conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$.

[1,0] (b) Indique dois elementos $x, y \in A$ tais que $x \nleq y$ e $y \nleq x$. Justifique se $(X, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado.

5. Considere os conjuntos $X = \{a,b,c,d,e\}$ e $Y = \{1,2,3,4,5\}$ e as seguintes aplicações h_1 e h_2 de $X \longrightarrow Y$:

$$h_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad h_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[1,5] (a) Determine $h_2^{\leftarrow}(\{1\})$. O que pode afirmar àcerca da injectividade de h_2 a partir do resultado obtido?

[1,5] (b) Indique, justificando, qual das aplicações é invertível e determine a sua inversa.

6. Sejam R e S relações binárias sobre um conjunto X. Sabendo que R é uma relação de equivalência sobre X mostre que:

[2,0] (a) $S \subseteq R \circ S$;

[2,0] (b) $R = R \circ R$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Matemática Discreta
Primeiro Teste – 8 de Abril de 2016
Uma resolução com notas explicativas

1. Sendo $\mathcal{A} = \{\{\{1\},\{1,2,3\}\},\{\{1,2\},\{1\}\}\}$ e e $B = \{\emptyset, b\}$. Tem-se:

(a) Sabemos que $\mathcal{P}(B) = \{X : \ X \subseteq B\}$ assim temos $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\emptyset, b\}, \{\emptyset\}, \{b\}\}$.

(b) $\bigcap \mathcal{A} = \{\{1\},\{1,2,3\}\} \cap \{\{1,2\},\{1\}\} = \{\{1\}\}$.

(c) $\bigcup \mathcal{A} = \{\{1\},\{1,2,3\}\} \cup \{\{1,2\},\{1\}\} = \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$.

(d) O produto cartesiano de destes conjuntos é o conjunto $\mathcal{A} \times B = \{(a,b) : \ a \in \mathcal{A} \wedge b \in B\}$. Deste modo temos $\mathcal{A} \times B = \{(\{\{1\},\{1,2,3\}\},\emptyset), (\{\{1\},\{1,2,3\}\},b), (\{\{1,2\},\{1\}\},\emptyset), (\{\{1,2\},\{1\}\},b)\}$.

2. (a) Usando tabelas de verdade temos:

$(B$	$\setminus$	$A)$	$\cup$	A	$=$	A	$\cup$	B
1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0
(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(4)	(1)	(2)	(1)

(b) Queremos mostrar que se $A \cap B = \emptyset$ então $(A \cup B^c) \subseteq B^c$.

Observemos que se $x \in A$, como $A \cap B = \emptyset$ então $x \notin A \cap B$ e, portanto, $x \notin B$. Assim temos:

$$\begin{array}{rcl} x \in (A \cup B^c) & \Leftrightarrow & (\text{definição de "} \cup \text{"}) \\ x \in A \vee x \in B^c & \Leftrightarrow & (\text{definição de "} B^c \text{"}) \\ x \in A \vee x \notin B & \Rightarrow & (\text{por hipótese "} A \cap B = \emptyset \text{"}) \\ x \in B^c & & \end{array}$$

Podemos então afirmar que se $x \in (A \cup B^c)$ então $x \in B^c$.

Concluimos assim que $(A \cup B^c) \subseteq B^c$.

3. (a) Por exemplo, $3 \in \mathrm{Dom}(R)$ pois $(3,5) \in R$, mas $3 \notin \mathrm{Im}(R)$.

(b) Como $(2,4), (3,5) \in R$, por definição de R^{-1}, os pares $(4,2)$ e $(5,3) \in \mathrm{R}^{-1}$.

Por outro lado temos que$(2,3) \in S \circ R$ pois $(2,4) \in R$ e $(4,3) \in S$. Análogamente, como $(2,1) \in R$ e $(1,5) \in S$ então $(2,5) \in S \circ R$

(c) A relação S não é reflexiva pois, por exemplo o par $(1,1) \notin S$.

A relação S é irreflexiva pois para qualquer $x \in X$ tem-se $(x,x) \notin S$.

A relação S não é simétrica pois, por exemplo $(4,3) \in S$ mas $(3,4) \notin S$.

A relação S não é anti simétrica pois $(1,5) \in S \wedge (5,1) \in S$.

4. (a) Chamamos **máximo** de A a um elemento $z \in A$ tal que $y \leq z$ para qualquer $y \in A$.

Máximo de A - não existe.

Chamamos **mínimo** de A a um elemento $z \in A$ tal que $z \leq y$ para qualquer $y \in A$.

Mínimo de A - c.

Chamamos **elemento maximal** de A a um elemento $z \in A$ tal que não existe $y \in A$ com $z \leq y$.

Conjunto dos elementos maximais de $A = \{i, m, n\}$.

Chamamos **elemento minimal** de A a um elemento $z \in A$ tal que não existe $y \in A$ com $y \leq z$.

Conjunto dos elementos minimais de $A = \{c\}$.

(b) Observando a diagrama de Hasse podemos verificar que, por exemplo, para os elementos $m, n \in A$ se tem $m \nleq n$ e $n \nleq m$. Ora, como uma relação de ordem parcial R é uma relação de ordem total sobre um conjunto X quando para quaisquer $x, y \in X$ se tem xRy ou yRx, podemos concluir que a relação dada não é uma relação de ordem total.

5. (a) Sabemos que $h_2^{\leftarrow}(B) = \{x \in X : h_2(x) \in B\}$. Assim termos que $h_2^{\leftarrow}(\{1\}) = \{x \in X : h_2(x) = 1\}$. Observando a tabela, podemos então afirmar que

$$h_2^{\leftarrow}(\{1\}) = \{b, d, e\}.$$

Uma vez que existem elementos diferentes (b, d, e) com a mesma imagem, podemos concluir que h_2 não é injectiva.

(b) Como h_2 não é injectiva então não é invertível.

Uma vez que $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow h_1(x) \neq h_2(y)$, podemos afirmar que a aplicação h_1 é injectiva.

Como $h_1(X) = Y$ então h_1 é sobrejectiva. Podemos pois concluir que h_1 é bijectiva e, por isso, invertível.

A inversa de $h_1 : Y \longrightarrow X$ é dada pela seguinte tabela:

$$h_1 = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ c & e & b & d & a \end{array} \right).$$

6. (a) Queremos provar que $(x, y) \in S \Rightarrow (x, y) \in R \circ S$.

Como R é uma relação de equivalência, então $\forall y \in X,\ (y, y) \in R$. Assim, dado $(x, y) \in S$ existe $(y, y) \in R$ e, por definição de $R \circ S$ podemos concluir que $(x, y) \in R \circ S$.

Logo $(x, y) \in S \Rightarrow (x, y) \in R \circ S$ e, portanto, $S \subseteq R \circ S$.

(b) Pela alínea anterior, porque R é uma relação de equivalência, podemos afirmar que $R \subseteq R \circ R$.

Para concluirmos a igualdade teremos de provar que $R \circ R \subseteq R$.

Seja $(x, y) \in R \circ R$. Por definição de $R \circ R$, sabemos que existe $a \in X$ tal que $(x, a) \in R$ e $(a, y) \in R$.

Uma vez que R é uma relação de equivalência e, por isso, transitiva podemos afirmar que se $(x, a) \in R \wedge (a, y) \in R$ então $(x, y) \in R$

Logo, $(x, y) \in R \circ R \Rightarrow (x, y) \in R$ e, portanto, $R \circ R \subseteq R$.

Das inclusões $R \subseteq R \circ R$ e $R \circ R \subseteq R$, concluimos que $R = R \circ R$.