FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta

Exame de Recurso – 28 de Junho de 2016

[Cotação] ***Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.***

[2,0] **1.** Considere os conjuntos $A = \Big\{\big\{\{1,3\},\{1,2,3\}\big\}, \big\{\{1,3\}\big\}, \big\{\{1,2\},\{1,3\}\big\}\Big\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$.
Determine:

(a) $\mathcal{P}(B)$ (b) $\bigcap A$ (c) $\bigcup\bigcup A$ (d) $B \times C$.

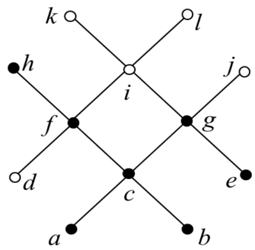
2. Considere, sobre $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a relação de equivalência R tal que $X/R = \big\{\{1, 3, 4\}, \{2\}, \{5\}\big\}$.

[0,5] (a) Represente a relação R através do seu diagrama.

[1,0] (b) Considere, sobre X, a relação $S = R \cup \{(2, 3), (3, 2)\}$. Justifique que S é uma relação reflexiva e simétrica mas não é transitiva.

[1,0] (c) Indique, justificando, um par $(a, b) \in (R \circ S) \setminus R$ e um par $(c, d) \in (R \circ S) \cap R$.

3. Considere o conjunto $X = \{a, b, c, \ldots, k, l\}$ e a relação de ordem parcial, $\leq$, sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



[1,5] (a) Indique, se existirem, os elementos mínimo, máximo, minimais e maximais, do subconjunto $A = \{a, b, c, e, f, g, h\}$ *(vértices escuros)* do conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$.

[1,5] (b) Indique, justificando, um subconjunto B de X que tenha máximo e mínimo e, pelo menos, um majorante e um minorante que não pertença a B.

4. Considere a aplicação $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ tal que:
$f(n) = (-1)^n n + n$.

[1,0] (a) Diga, justificando, se f é injectiva ou sobrejectiva.

[0,5] (b) Indique $f(\{2p + 1 : p \in \mathbb{N}_0\})$.

[1,0] (c) Indique $f^{-1}(\{4, 8\})$ e $f^{-1}(3)$.

[2,0] **5.** Considere o conjunto $A = \{(2n, 2n) : n \in \mathbb{N}_0\}$. Defina indutivamente o conjunto A e indique as suas regras de inferência.

6. Uma árvore T tem apenas vértices de grau 1 e vértices de grau 4. Sabendo que a média dos graus dos seus vértices é $1,9$ determine:

[1,0] (a) O número de arcos de T.

[1,0] (b) O número de vértices de grau 1 de T.

7. Seja $G = (X \dot{\cup} Y, \mathcal{U})$ um grafo bipartido conexo em que todos os vértices têm grau maior ou igual a dois.

[1,0] (a) Justifique que se $u \in \mathcal{U}$ é uma ponte de G então $G - u$ é a união disjunta de dois grafos bipartidos conexos.

[1,0] (b) Seja u uma ponte de G e seja G' uma das componentes conexas de $G - u$.
Mostre que $\sum_{x \in X'} d_{G'}(x) = \sum_{y \in Y'} d_{G'}(y)$ onde X' e Y' são as classes de vértices de G'.

[1,0] (c) Utilizando a alínea anterior, mostre que se G é regular de grau 2 então G não tem pontes.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

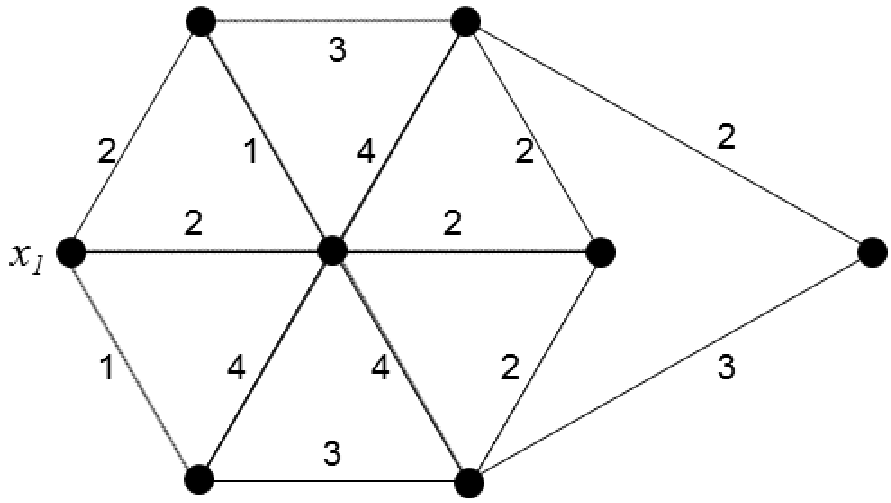
Nome:____

Número de aluno: | | | | | | | **Número de caderno:** | | | | | | |

Deve responder a esta pergunta na folha do enunciado e não no caderno.

[2,5] **8.** (a) Usando o algoritmo de Prim a partir do vértice x_1, determine uma árvore maximal de valor mínimo para o seguinte grafo ponderado.

[*Identifique os arcos e os vértices, numerando-os pela ordem que os for escolhendo.*]



[0,5] (b) Indique o valor da árvore obtida.