

[Cotação]

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

1. Considere as aplicações $f : \mathbb{N} \rightarrow \{a, b, c\}$ e $g : \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ tais que

$$f(2n) = a \quad f(2n-1) = b, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

[2,0] (a) Diga, justificando se f é injectiva ou sobrejectiva.

[1,0] (b) Indique $f(\{p, p+1\})$ para $p \in \mathbb{N}$.

[2,0] (c) Indique $f^{-1}(\{a, c\})$ e $g^{-1}(2)$.

[1,5] (d) Determine a função composta $g \circ f$.

- [2,0] 2. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejectiva e seja $B \subseteq Y$. Mostre que

$$f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

3. Seja $\mathbb{N}_3$ o conjunto dos números naturais maiores ou iguais a 3.

[2,0] (a) Defina $\mathbb{N}_3$ indutivamente e escreva as respectivas regras de inferência.

[2,0] (b) Prove que $5^n - 1$ é divisível por 4, para qualquer $n \in \mathbb{N}_3$.

4. Considere o conjunto A definido indutivamente pelas regras:

Axioma: $(1, 0) \in A$;

Regra: $((m, n) \in A \Rightarrow (suc(suc(m)), n) \in A), \forall m, n \in \mathbb{N}_0$.

(Onde $suc(m)$ representa o sucessor de m na cadeia $\mathbb{N}_0$.)

[2,0] (a) Represente, em compreensão, o conjunto A .

[1,5] (b) Prove, usando as regras dadas, que $(3, 0) \in A$.

5. Seja S o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ de comprimento maior ou igual a 1 definido indutivamente da seguinte forma:

Axioma 1: $a \in S$;

Axioma 2: $b \in S$;

Regra: $((w \in S \wedge x \in \Sigma) \Rightarrow conc_x(w) \in S), \forall w \in S$.

(Onde $conc_x(w)$ corresponde a justapor x à direita de w .)

[2,0] (a) Escreva as equações que definem recursivamente $f : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ onde $f(w)$ é, para cada $w \in S$, o número de símbolos a existentes na palavra w .

[2,0] (b) Prove que as equações obtidas na alínea anterior definem uma função.

Fim

1. (a) Uma aplicação é injectiva se a elementos diferentes corresponderem imagens diferentes.

Como, por exemplo, $4 \neq 6$ mas $f(4) = f(2 \times 2) = f(6) = f(2 \times 3) = a$, podemos afirmar que f não é injectiva.

Uma aplicação é sobrejectiva se a imagem de f , Imf , coincidir com o conjunto de chegada.

Ora, $Imf = \{a, b\}$ mas o conjunto de chegada de f é $\{a, b, c\}$ logo f não é sobrejectiva.

- (b) Por definição $f(\{p, p+1\}) = \{f(p), f(p+1)\}$. Sabemos que:

se $p = 2n$ então $p+1 = 2n+1 = 2(n+1) - 1 = 2n' - 1$

e se $p = 2n - 1$ então $p+1 = 2n$.

Assim, independentemente do valor de p obtemos sempre os dois possíveis valores para as imagens de elementos de $\mathbb{N}$ logo $f(\{p, p+1\}) = \{a, b\}$.

- (c) Por definição $f^{-1}(\{a, c\}) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in \{a, c\}\}$.

Como c não é imagem de nenhum elemento de $\mathbb{N}$, temos que

$$f^{-1}(\{a, c\}) = f^{-1}(\{a\}) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = a\} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por outro lado, $g^{-1}(2) = \{x \in \{a, b, c\} : g(x) = 2\} = \emptyset$.

- (d) A função composta é uma função $g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ tal que

$$g \circ f(2n) = g(f(2n)) = g(a) = 1 \quad \text{e} \quad g \circ f(2n-1) = g(f(2n-1)) = g(b) = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Queremos mostrar que

$$f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Assim temos:

$$y \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) \Leftrightarrow \text{(definição de imagem de um conjunto)}$$

$$y = f(x) \wedge x \in f^{-1}(Y \setminus B) \Rightarrow \text{(definição de imagem inversa de um conjunto)}$$

$$y \in Y \setminus B$$

Como f é sobrejectiva se $y \in Y \setminus B \Rightarrow y = f(x) \wedge x \in f^{-1}(Y \setminus B)$.

Concluimos, assim, que $f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B$.

3. (a) Para definir indutivamente um conjunto necessitamos de axiomas e regras. Neste caso, bastar-nos-á um axioma e uma regra que são:

Axioma: $3 \in \mathbb{N}_3$;

Regra: $((m \in \mathbb{N}_3) \Rightarrow suc(m) \in \mathbb{N}_3), \forall m \in \mathbb{N}_3$.

As regras de inferência deste conjunto podem ser representadas do seguinte modo:

$$\frac{}{3 \in \mathbb{N}_3} \quad \text{e} \quad \frac{m \in \mathbb{N}_3}{suc(m) \in \mathbb{N}_3}$$

- (b) Consideremos $P = \{n \in \mathbb{N}_3 : 5^n - 1 \text{ é divisível por } 4\}$. Prove-se, por indução que $P = \mathbb{N}_3$.

Verifiquemos, em primeiro lugar, que $3 \in P$. Sabemos que $3 \in P$ se $5^3 - 1 = 125 - 1 = 124$ for divisível por 4. Tal é verdade pois $124 = 4 \times 31$. Logo $3 \in P$.

Hipótese de indução: $n \in P$, isto é, para um certo $n \in \mathbb{N}_3$, $5^n - 1$ é divisível por 4.

Seja $n + 1 \in \mathbb{N}_3$. Verifiquemos se $n + 1 \in P$.

Ora, $n + 1 \in P$ se $5^{n+1} - 1$ é divisível por 4.

Temos $5^{n+1} - 1 = 5 \times 5^n - 1 = 5(5^n - 1) + 4$.

Por hipótese de indução $5^n - 1$ é divisível por 4, isto é, $5^n - 1 = 4k$ então $5(5^n - 1) + 4 = 5 \times 4k + 4 = 5 \times (4k + 1)$ logo, $5^{n+1} - 1$ é divisível por 4.

Temos então que $5^{n+1} - 1 \in P$ e, pelo Princípio de Indução Matemática, podemos concluir que $P = \mathbb{N}_3$.

4. (a) Os elementos de A são os pares $(1, 0), (3, 0), (5, 0), \dots$. Este conjunto pode ser representado em compreensão por

$$A = \{(2n - 1, 0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

- (b) O elemento $(3, 0)$ de A é a abreviatura de $(suc(suc(1), 0))$. Tendo em conta as regras de inferência do conjunto A , podemos escrever

$$\frac{(1, 0) \in A}{(suc(suc(1), 0)) \in A}.$$

5. (a) Defina-se a função $f : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ do seguinte modo:

$$\begin{cases} f(a) = 1 \\ f(b) = 0 \\ f(conc_a(w)) = f(w) + 1 \\ f(conc_b(w)) = f(w) \end{cases}.$$

- (b) Provemos que f é uma função.

Seja

$$R = \{w \in W : \exists^1 n \in \mathbb{N}_0, f(w) = n\}.$$

Por indução estrutural provemos que $R = \mathbb{N}$.

(Elementos básicos) a é um elemento básico de S . Atendendo à equação $f(a) = 1$, existe um único elemento de $\mathbb{N}_0$ (o um) que é igual a $f(a)$.

b é um elemento básico de S . Atendendo à equação $f(b) = 0$, existe um único elemento de $\mathbb{N}_0$ (o zero) que é igual a $f(b)$.

(Regras) As regras de S são $\frac{w \in S}{conc_a(w) \in S}$ e $\frac{w \in S}{conc_b(w) \in S}$

(Hipótese de Indução) Se $w \in R$ então existe um único natural p tal que $f(w) = p$.

Vejamos que $\frac{w \in S}{conc_a(w) \in S}$ é uma R -regra.

Como $f(conc_a(w)) = f(w) + 1$ então existe um único elemento de $\mathbb{N}_0$ ($r = p + 1$) tal que $f(conc_a(w)) = r$.

Logo $conc_a(w) \in R$.

Vejamos que $\frac{w \in S}{conc_b(w) \in S}$ é uma R -regra.

Como $f(conc_b(w)) = f(w)$ então existe um único elemento de $\mathbb{N}_0$ ($r = p$) tal que $f(conc_b(w)) = r$.

Logo $conc_b(w) \in R$.

Assim, pelo Princípio de Indução, $R = S$ e, portanto, f é uma função.