FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta

Primeiro Teste – 10 de Abril de 2015

[Cotação] Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

1. Considere o conjunto $D = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$. Determine:

[1,5] (a) $\bigcap D$.

[1,5] (b) $\bigcup D$.

[1,5] (c) Um conjunto X tal que $|X| = 3$ e $D \subseteq \mathcal{P}(X)$.

2. Sejam A e B subconjuntos de um conjunto S.

[2,0] (a) Mostre através de uma tabela de verdade, que

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset.$$

[2,0] (b) Mostre formalmente que

$$(A' \setminus B) \subseteq (A \cup B)'.$$

3. Seja $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b\}$.

[1,5] (a) Determine e represente em extensão o conjunto $A \times B$.

[1,5] (b) Indique um subconjunto, não vazio, C de $A \times B$ tal que $C = A_1 \times B_1$ onde $A_1 \subsetneq A$ e $B_1 \subsetneq B$.

4. Considere, sobre $X = \{1,2,3\}$, a relação binária $S = \{(1,2),(3,1)\}$ e uma relação de equivalência R tal que $X/R = \{\{1\},\{2,3\}\}$.

[1,5] (a) Determine a matriz de adjacências de R.

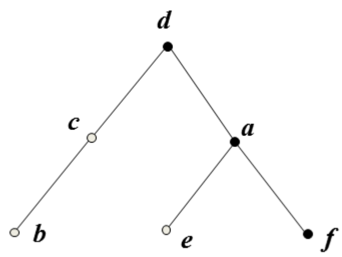
[1,5] (b) Indique se a relação S é reflexiva, irreflexiva, simétrica, anti-simétrica ou transitiva.

[1,5] (c) Indique o conjunto dos pares da relação $R \circ S$.

[1,0] (d) Determine R^{-1}.

5. Seja $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ um conjunto e $Y = \{b,c,e\}$ um subconjunto de X.

Considere a relação de ordem parcial R definida sobre X pelo seguinte diagrama de Hasse:



[1,0] (a) Verifique se R é uma relação de ordem total.

[2,0] (b) Indique, caso existam, os elementos majorantes, supremo, máximo e maximais do subconjunto Y do c.p.o. (X,R).

Fim

1. Sendo $D = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$.

(a) $\bigcap D = \emptyset \cap \{1\} \cap \{1,2\} = \emptyset$.

(b) $\bigcup D = \emptyset \cup \{1\} \cup \{1,2\} = \{1,2\}$.

(c) Por exemplo, $X = \{1,2,3\}$, pois $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ e, portanto, tem-se $D \subseteq \{\mathcal{P}(X)\}$.

2. (a) Usando tabelas de verdade temos:

$(A'$	$\setminus$	$B)$	$\cap$	B	$=$	$\emptyset$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0
(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(4)	(1)

(b) Queremos mostrar que

$$(A' \setminus B) \subseteq (A \cup B)'.$$

Assim temos:

$$\begin{array}{rcl} x \in A' \setminus B & \Leftrightarrow & \text{(definição de } \setminus) \\ x \in A' \wedge x \notin B & \Leftrightarrow & \text{(definição de } X') \\ x \notin A \wedge x \notin B & \Leftrightarrow & \text{(Leis de De Morgan)} \\ x \notin (A \cup B) & \Leftrightarrow & \text{(definição de } X') \\ x \in (A \cup B)' & & \end{array}$$

Podemos então afirmar que se $x \in (A' \setminus B)$ então $x \in (A \cup B)'$.
Concluimos assim que $(A' \setminus B) \subseteq (A \cup B)'$.

3. (a) Sabemos que o conjunto $A \times B$ é constituido por todos os pares ordenados em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B. Assim temos:

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}.$$

(b) Considerando, por exemplo, $A_1 = \{1,2\}$ e $B_1 = \{a\}$ verifica-se que $A_1 \subseteq A$ e $A_1 \neq A$ pois $3 \in A$ e $3 \notin A_1$ e, analogamente, que $B_1 \subseteq B$ e $B_1 \neq B$ pois $b \in B$ e $b \notin B_1$. Desta forma, o conjunto $C = A_1 \times B_1$ é o conjunto

$$C = \{(1,a), (2,a)\}.$$

4. Dadas, sobre $X = \{1,2,3\}$, a relação binária $S = \{(1,2), (3,1)\}$ e a relação de equivalência R tal que $X/R = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ temos:

(a) A relação de equivalência R é dada pelo conjunto:$\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3)\}$

Atendendo a que a matriz de adjacências de uma relação R é uma matriz quadrada, de zeros e uns, com ordem $|X|$ e em que a posição ij toma o valor 1 se, e só se, o par $(i,j) \in R$, obtemos a seguinte matriz de adjacências para R:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) A relação S não é reflexiva pois, por exemplo o par $(1,1) \notin S$.

A relação S é irreflexiva pois para qualquer $x \in X$ tem-se $(x,x) \notin S$.

A relação S não é simétrica pois, por exemplo $(1,2) \in S$ mas $(2,1) \notin S$.

A relação S é anti simétrica pois $(1,2) \in S$ mas $(2,1) \notin S$ e $(3,1) \in S$ mas $(1,3) \notin S$. Ou seja para todos os elementos (a,b) de S com $a \neq b$, $(b,a) \notin S$.

A relação S não é transitiva pois $(3,1) \in S$ e $(1,2) \in S$ mas $(3,2) \notin S$.

(c) Um par (a,b) pertence à relação $R \circ S$ se existe um elemento z de X tal que $(a,z) \in S$ e $(z,b) \in R$. Assim, temos

- $(1,2) \in S$ e $(2,2) \in R$ logo $(1,2) \in R \circ S$;
- $(1,2) \in S$ e $(2,3) \in R$ logo $(1,3) \in R \circ S$;
- $(3,1) \in S$ e $(1,1) \in R$ logo $(3,1) \in R \circ S$.

Podemos então concluir que $R \circ S = \{(1,2),(1,3),(3,1)\}$.

(d) A relação R^{-1} está definida como sendo o conjunto dos pares (y,x) tais que $(x,y) \in R$. Assim:

$$R^{-1} = \{(1,1),(3,2),(2,3),(2,2),(3,3)\} = R.$$

5. (a) Uma relação de ordem parcial R é uma relação de ordem total sobre um conjunto X quando para quaisquer $x, y \in X$ se tem xRy ou yRx.

Como se pode verificar a relação dada por este diagrama de Hasse não é uma relação de ordem total uma vez que, por exemplo, $c \not R e$ e $e \not R c$.

(b) Chamamos **majorante** de Y a um elemento $x \in X$ tal que yRa para qualquer $y \in Y$.

Conjunto dos majorantes de $Y = \{d\}$.

Chamamos **supremo** de Y ao menor dos majorantes Y.

Supremo de $Y = d$.

Chamamos **máximo** de Y a um elemento $zb \in Y$ tal que yRz para qualquer $y \in Y$.

Máximo de Y - não existe.

Chamamos **elemento maximal** de Y a um elemento $z \in Y$ tal que não existe $y \in Y$ com zRy.

Conjunto dos elementos maximais de $Y = \{c, e\}$.