



+215/1/52+

Departamento de Matemática
 Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
 07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: Jorge Miguel Pronto Canelas

Número: 44347 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B))$.

☒ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B))$.

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

☒ Todas são sobrejectivas.

☒ Nenhuma é injectiva.

☐ Todas são injectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ g é bijectiva.

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

☐ f é bijectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : W \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de W (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+214/1/54+

Departamento de Matemática
Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: José António Rodrigues Monteiro

Número: 43891 Curso: MIEC

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

☒ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☐ Todas são sobrejectivas.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

☒ Nenhuma é injectiva.

☒ Todas são injectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

☒ g é bijectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ f é bijectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☒ Quatro das aplicações são invertíveis.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ a $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☒ b $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ c $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☒ d $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☒ a $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ b $\Delta = \{\emptyset\}$.

☒ c $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☐ d $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ a $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☐ b $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☒ c $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☒ d $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ a $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ b $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ c $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ d $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

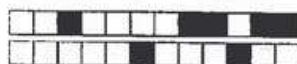
Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+539/1/4+

Departamento de Matemática
 Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
 07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadradinhos respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: José Carlos Martins Cardoso

Número: 40650 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B))$.

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B))$.

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

☐ Todas são sobrejectivas.

☒ Nenhuma é injectiva.

☐ Todas são injectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ f é bijectiva.

☐ g é bijectiva.

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

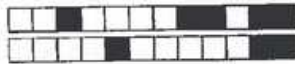
Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☒ Quatro das aplicações são invertíveis.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☒ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



Departamento de Matemática
Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
07/05/2014
2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: José Carlos Torres Rafael

Número: 42085 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☒ Nenhuma é injectiva.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

☐ Todas são injectivas.

☐ Todas são sobrejectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ f é bijectiva.

☒ f é sobrejectiva e g é injectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ g é bijectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$. ☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$. ☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função *zeros* : $\mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+504/1/14+

Departamento de Matemática
Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
07/05/2014
2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadradinhos respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: José Diogo Pires das Graças

Número: 42877 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☒ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☒ Nenhuma é injectiva.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

☐ Todas são sobrejectivas.

☐ Todas são injectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ g é bijectiva.

☐ f é bijectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ a $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ c $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ b $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☒ d $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ a $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☐ c $\Delta = \{\emptyset\}$.

☒ b $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ d $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ a $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☒ b $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☒ c $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ d $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☒ a $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ b $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ c $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ d $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



Departamento de Matemática
 Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
 07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadradinhos respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: José Maria Pantoja Mata Vale e Azevedo
 Número: 42545 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

- 0/2
- ☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$. ☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B))$.
☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B))$. ☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

- 0.5/2
- ☒ Nenhuma é injectiva. ☐ Todas são sobrejectivas.
☐ Nenhuma é sobrejectiva. ☒ Todas são injectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

- 2/2
- ☐ f é sobrejectiva e g é injectiva. ☐ f é bijectiva.
☐ g é bijectiva. ☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

- 2/2
- ☐ Nenhuma das aplicações é invertível. ☐ Quatro das aplicações são invertíveis.
☒ Apenas duas aplicações são invertíveis. ☐ Apenas uma das aplicações é invertível.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \dots\}$. ☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$. ☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+11/1/40+

Departamento de Matemática
 Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
 07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: José Miguel Neto Cotrim de Leão Cardoso

Número: 43325 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B))$.

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

☒ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B))$.

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☒ Nenhuma é injectiva.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

☐ Todas são injectivas.

☐ Todas são sobrejectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ f é bijectiva.

☐ g é bijectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \dots\}$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

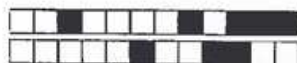
Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



Departamento de Matemática
Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: José Pedro Serra Afonso

Número: 43304 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☒ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☒ Nenhuma é injectiva.

☐ Todas são sobrejectivas.

☐ Todas são injectivas.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ g é bijectiva.

☒ f é sobrejectiva e g é injectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ f é bijectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☒ Nenhuma das aplicações é invertível.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☒ $\Delta = \{\emptyset\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : W \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de W (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+179/1/4+

Departamento de Matemática
 Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
 07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: José Rafael Guerra Monteiro
 Número: 43211 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

- 0/2
- | | |
|---|--|
| ☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$ | ☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$ |
| ☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$ | ☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$ |

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

- 0.5/2
- | | |
|--|--|
| ☐ Nenhuma é sobrejectiva. | ☒ Todas são sobrejectivas. |
| ☐ Todas são injectivas. | ☒ Nenhuma é injectiva. |

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

- 2/2
- | | |
|---|--|
| ☒ f é injectiva e g é sobrejectiva. | ☐ f é bijectiva. |
| ☐ g é bijectiva. | ☐ f é sobrejectiva e g é injectiva. |

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

- 2/2
- | | |
|---|---|
| ☐ Apenas uma das aplicações é invertível. | ☐ Quatro das aplicações são invertíveis. |
| ☒ Apenas duas aplicações são invertíveis. | ☐ Nenhuma das aplicações é invertível. |



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$. ☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+490/1/42+

Departamento de Matemática
 Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
 07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: João André Lucas da Silva Gonçalves

Número: 44036 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☒ Todas são sobrejectivas.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

☒ Nenhuma é injectiva.

☐ Todas são injectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ f é bijectiva.

☐ g é bijectiva.

☒ f é sobrejectiva e g é injectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.

☒ Nenhuma das aplicações é invertível.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ a $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☒ b $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ c $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ d $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ a $\Delta = \{\emptyset\}$.

☐ c $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☒ b $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ d $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ a $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☒ b $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ c $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☐ d $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☒ a $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ b $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ c $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ d $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+380/1/22+

Departamento de Matemática
 Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
 07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: João Bernardo da Cunha Cabrita

Número: 43788 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☒ Todas são sobrejectivas.

☐ Todas são injectivas.

☒ Nenhuma é injectiva.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ f é bijectiva.

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

☐ g é bijectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



Departamento de Matemática
 Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
 07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadradinhos respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: João Carlos Cristo Reis

Número: 43914 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

- ☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. ☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B))$.
☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B))$. ☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

- ☒ Nenhuma é injectiva. ☒ Todas são injectivas.
☐ Nenhuma é sobrejectiva. ☐ Todas são sobrejectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

- ☒ f é injectiva e g é sobrejectiva. ☐ f é bijectiva.
☐ g é bijectiva. ☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

- ☐ Quatro das aplicações são invertíveis. ☐ Nenhuma das aplicações é invertível.
☐ Apenas uma das aplicações é invertível. ☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+234/1/14+

Departamento de Matemática
Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	☒
1	1	1	1	1
2	☒	2	2	2
3	3	3	3	3
☒	4	☒	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	☒	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadrados respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: João Carlos Ferra de Almeida

Número: 42490 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

☒ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☒ Nenhuma é injectiva.

☒ Nenhuma é sobrejectiva.

☐ Todas são sobrejectivas.

☐ Todas são injectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☒ f é bijectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ g é bijectiva.

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \dots\}$. ☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$. ☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+488/1/46+

Departamento de Matemática
Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
07/05/2014
2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: João Concruta Costa e Moura

Número: 41620 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☒ Nenhuma é injectiva.

☒ Todas são sobrejectivas.

☐ Todas são injectivas.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ g é bijectiva.

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

☒ f é bijectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : W \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de W (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+244/1/54+

Departamento de Matemática
Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	☒	2	2	☒
3	3	3	☒	3
☒	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	☒	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (☒) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: João Filipe Sampaio Freire

Número: 42932 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (☒) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

☒ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B))$.

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B))$.

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☐ Todas são sobrejectivas.

☐ Todas são injectivas.

☒ Nenhuma é injectiva.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ f é bijectiva.

☐ g é bijectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ a $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ c $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ b $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☒ d $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ a $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$. ☒ c $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☒ b $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$. ☐ d $\Delta = \{\emptyset\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ a $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☒ d $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ b $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☐ c $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ a $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ b $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ c $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ d $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+410/1/22+

Departamento de Matemática
Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: João Trindade

Número: 41413 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☒ Todas são injectivas.

☒ Nenhuma é injectiva.

☐ Todas são sobrejectivas.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ g é bijectiva.

☒ f é bijectiva.

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☒ Quatro das aplicações são invertíveis.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$. ☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função *zeros* : $\mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



Departamento de Matemática
Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadradinhos respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: João Gil Pereira

Número: 44064 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☒ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☐ Todas são injectivas.

☒ Todas são sobrejectivas.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

☒ Nenhuma é injectiva.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ f é bijectiva.

☐ g é bijectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ a $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ b $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☒ c $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ d $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☒ a $\Delta = \{\emptyset\}$.

☒ b $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ c $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☐ d $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ a $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☒ b $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☐ c $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☒ d $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☒ a $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ b $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ c $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ d $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função *zeros* : $\mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+140/1/22+

Departamento de Matemática
Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: João Gonçalo P3ova Tavares
Oliveira
Número: 42549 Curso: MIEI

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

- 0/2
- | | |
|---|---|
| ☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$ | ☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$ |
| ☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$ | ☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$ |

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

- 0.5/2
- | | |
|--|--|
| ☒ Nenhuma é injectiva. | ☐ Nenhuma é sobrejectiva. |
| ☐ Todas são injectivas. | ☒ Todas são sobrejectivas. |

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

- 2/2
- | | |
|---|---|
| ☐ g é bijectiva. | ☒ f é injectiva e g é sobrejectiva. |
| ☐ f é bijectiva. | ☐ f é sobrejectiva e g é injectiva. |

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

- 0/2
- | | |
|---|--|
| ☒ Apenas duas aplicações são invertíveis. | ☐ Quatro das aplicações são invertíveis. |
| ☐ Nenhuma das aplicações é invertível. | ☐ Apenas uma das aplicações é invertível. |



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$. ☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+295/1/12+

Departamento de Matemática
 Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
 07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadra-
 dos respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número
 e o curso abaixo.

Nome: João Ivan Martins Aguiar Rodrigues.....

e Silva.....

Número: 42927.....

Curso: MIEI.....

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a
 resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com
 caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta
 errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão.
 Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores
 cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos
 A e B de X .

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

☒ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações
 de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

☒ Nenhuma é injectiva.

☐ Todas são injectivas.

☒ Todas são sobrejectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva
 então:

☐ f é bijectiva.

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ g é bijectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☒ Quatro das aplicações são invertíveis.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : W \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de W (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .



+75/1/32+

Departamento de Matemática
 Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
 07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome: ...João Luís Carreiras Ribeiro Parracha...

Número: ...43688... Curso: ...MIEC...

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☒ $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☒ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

☐ $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

☐ $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☐ Todas são sobrejectivas.

☐ Todas são injectivas.

☐ Nenhuma é sobrejectiva.

☒ Nenhuma é injectiva.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ f é sobrejectiva e g é injectiva.

☐ g é bijectiva.

☒ f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ f é bijectiva.

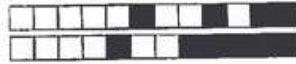
Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ Nenhuma das aplicações é invertível.

☐ Quatro das aplicações são invertíveis.

☒ Apenas duas aplicações são invertíveis.

☐ Apenas uma das aplicações é invertível.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☒ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☒ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset\}$.

☐ $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

☐ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☒ $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☒ $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : W \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de W (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .