Análise Matemática II E

2º semestre de 2019/20

Exame de Época 1 (18/06/2020)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possibilidades.

1 $\frac{y'}{y} + x\,\text{sen}(x^2) = e^{\frac{\cos(x^2)}{2}} \frac{\text{arctg}\,x}{y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y' + x\,\text{sen}(x^2)\,y = e^{\frac{\cos(x^2)}{2}}\,\text{arctg}\,x$

Sendo esta uma EDO linear de primeira ordem, determinemos um factor integrante para a mesma

$$\mu(x) = e^{\int x\,\text{sen}(x^2)\,dx} = e^{-\frac{\cos(x^2)}{2}}$$

Assim

$$e^{-\frac{\cos(x^2)}{2}}\,y' + x\,\text{sen}(x^2)\,e^{-\frac{\cos(x^2)}{2}}\,y = \text{arctg}\,x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{\cos(x^2)}{2}}\,y\right) = \text{arctg}\,x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{\cos(x^2)}{2}}\,y = \int \text{arctg}\,x\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{\cos(x^2)}{2}}\,y = x\,\text{arctg}\,x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{\cos(x^2)}{2}} y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\frac{\cos(x^2)}{2}}\left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c\right), \ c \in \mathbb{R}$$

2

a) $y(t) \to$ temperatura da gelatina, em graus centígrados, ao fim de t horas

$$\begin{cases} y' = k(y-4) \\ y(0) = 28 \end{cases}$$

b)

$$y' = k(y-4) \Leftrightarrow y' - ky = -4k$$

Sendo esta equação diferencial linear, determinemos um factor integrante para a mesma

$$\mu(t) = e^{\int -k \, dt} = e^{-kt}$$

Então:

$$e^{-kt} y' - k e^{-kt} y = -4k e^{-kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-kt} y\right) = -4k e^{-kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt} y = \int -4k e^{-kt} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt} y = 4 e^{-kt} + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 4 + c e^{kt}, c \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 28 \Leftrightarrow 28 = 4 + c \Leftrightarrow c = 24$$

Assim

$$y = 4 + 24 e^{kt}$$

e) $$y(1) = 25 \Leftrightarrow 25 = 4 + 24 e^{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{24} = e^{k} \Leftrightarrow k = \log\left(\frac{21}{24}\right)$$

$$\therefore y = 4 + 24 e^{\log\left(\frac{21}{24}\right) t}$$

$$y(t) = 13 \Leftrightarrow 13 = 4 + 24 e^{\log\left(\frac{21}{24}\right) t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{24} = e^{\log\left(\frac{21}{24}\right) t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{21}{24}\right) t = \log\left(\frac{9}{24}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\log\left(\frac{9}{24}\right)}{\log\left(\frac{21}{24}\right)} \text{ horas}$$

③

a) Só é possível prolongar f por continuidade a $(1,0)$ se $\lim_{(x,y)\to(1,0)} (e^{xy}-1)\frac{xy^2}{(x-1)^2+y^2}$ existir

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} (e^{xy}-1)\frac{xy^2}{(x-1)^2+y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^{xy}-1}{xy}\,\frac{x^2y^3}{(x-1)^2+y^2}$$

Como $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^{xy}-1}{xy} = 1$ pois $\lim_{(x,y)\to(1,0)} xy = 0$ e

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y^3}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{(1+\rho\cos\theta)^2\rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} =$$

$$\begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho>0, \ \theta\in[0,2\pi[$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \theta\in[0,2\pi[}} (1+\rho\cos\theta)^2\rho\sin^3\theta = 0 \text{ pois}$$

$\cos\theta$ e $\sin^3\theta$ são funções limitadas e $\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \theta\in[0,2\pi[}} \rho = 0$

podemos concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} (e^{xy}-1)\frac{xy^2}{(x-1)^2+y^2} = 1\times 0 = 0$$

pelo que é possível prolongar f por continuidade a $(1,0)$. A função prolongamento é dada por

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} (e^{xy}-1)\dfrac{xy^2}{(x-1)^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(1,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(1,0) \end{cases}$$

b)

$$\bar{f}'_{(-1,2)}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\bar{f}((1,0)+t(-1,2))-\bar{f}(1,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\bar{f}(1-t,2t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(e^{(1-t)2t}-1)\frac{(1-t)4t^2}{(-t)^2+4t^2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{e^{(1-t)2t}-1}{t}\right)\frac{(1-t)4\cancel{t^2}}{5\cancel{t^2}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{(1-t)2t}-1}{2t(1-t)} \; \frac{(1-t)^2 8}{5} = 1\times\frac{8}{5} = \frac{8}{5} \text{ pois}$$

$$\lim_{t \to 0} (1-t)\, 2t = 0$$

e) Se a função prolongamento de f tem de ser diferenciável em $(1,0)$ então também tem de ser contínua em $(1,0)$, logo, a ser possível fazer o prolongamento, $\bar{\bar{f}}(1,0) = 0$ (pelo que foi visto na alínea a)).

Se $\bar{\bar{f}}$ for diferenciável em $(1,0)$ então

$$\bar{\bar{f}}'_{(-1,2)}(1,0) = \bar{f}'_{(-1,2)}(1,0) = \frac{8}{5}\,, \text{ pelo que}$$

foi visto na alínea B), mas vai também ser igual a

$$\bar{\bar{f}}'_{(-1,2)}(1,0) = d\bar{\bar{f}}(1,0)(-1,2) =$$

$$= \nabla \bar{\bar{f}}(1,0)^T \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\bar{\bar{f}}}{da}(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{\bar{f}}(1+h,0) - \bar{\bar{f}}(1,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(e^0 - 1)\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

(7)

$$\frac{\partial \bar{\bar{f}}}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{\bar{f}}(1,h) - \bar{\bar{f}}(1,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(e^h - 1)\frac{\cancel{h}/2}{\cancel{h}/2} - 0}{h} = 1$$

Assim

$$\bar{\bar{f}}'_{(-1,2)}(1,0) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \neq \frac{8}{5} \quad \text{logo}$$

$\bar{\bar{f}}$ não é diferenciável em $(1,0)$ pelo que não é possível prolongar f a $(1,0)$ por forma a que a função prolongamento seja diferenciável em $(1,0)$.

(4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\, f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xy\, f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\frac{xy-(x+y)y}{x^2y^2} =$$

$$= y\, f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left(-\frac{y}{x}\right)$$

Atendendo à simetria das variáveis x e y na definição de u, sabemos que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\, f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left(-\frac{x}{y}\right)$$

Assim

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y\, f\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \cancel{xy\, f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)}$$

$$- y^2 x\, f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + \cancel{xy\, f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)} =$$

$$= xy\, f\left(\frac{x+y}{xy}\right)(x-y) = u\, g(x,y), \text{ com}$$

$g(x,y) = x-y$ que é uma função linear.

5 Sendo $\{u_1, u_2\}$ uma qualquer base de $\mathbb{R}^2$ sabemos que qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como uma combinação linear de u_1, u_2, ou seja,

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \text{ para } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Assim para $x \in \mathbb{R}^2$ e como f é diferenciável

$$f'_u(x) = df(x)(u) = df(x)(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) =$$

$$= \alpha_1\, df(x)(u_1) + \alpha_2\, df(x)(u_2), \text{ pois}$$

o diferencial é uma função linear.

Então

$$f'_u(x) = \alpha_1 f'_{u_1}(x) + \alpha_2 f'_{u_2}(x) = \alpha_1 \times 0 + \alpha_2 \times 0 = 0$$

Em particular:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = f'_{(1,0)}(x) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = f'_{(0,1)}(x) = 0$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0 \Rightarrow f(x_1, x_2) = g(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = g'(x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_2) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Logo

$$f(x) = f(x_1, x_2) = g(x_2) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

6

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{8}{x^2} \\ -\frac{x}{y^2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{8} \\ \frac{-x}{\frac{x^4}{64}} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{8} \\ -\frac{64}{x^3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{8} \\ -64 = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Ponto estaccionário $(-4, 2)$

Como $f \in C^2(D)$ vamos usar o teste da matriz Hessiana para classificar este ponto estaccionário

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{16}{x^3} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}$$

no ponto $(-4,2)$ temos:

$$|\text{Hess} f(-4,2)| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0$$

logo $(-4,2)$ é ponto de extremo relativo

Como $\frac{d^2f}{dx^2}(-4,2) = -\frac{1}{4} < 0$ temos que $(-4,2)$ (11)

é ponto de máximo relativo.

(7)

a) Seja

$$F(x,y,z) = \arcsin\left(\frac{1}{2x} + y^2\right) - \frac{\pi}{6} + tg\left(y e^{zx}\right)$$

① $F(1,0,0) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{6} + tg(0) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 0 = 0$

②
$$\frac{dF}{dx}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2x}+y^2\right)^2}} \times \left(-\frac{1}{2x^2}\right) + \frac{1}{\cos^2\left(y e^{zx}\right)} \cdot y z e^{zx}$$

$$\frac{dF}{dy}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2x}+y^2\right)^2}} \times 2y + \frac{1}{\cos^2\left(y e^{zx}\right)} \cdot e^{zx}$$

$$\frac{dF}{dz}(x,y,z) = \frac{1}{\cos^2\left(y e^{zx}\right)} \cdot y x e^{zx}$$

são funções contínuas numa vizinhança de $(1,0,0)$ pois $\left(\frac{1}{2\times 1} + 0^2\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$ e $1^2 \neq 0$ e

$\cos^2\left(0\, e^{0\times 1}\right) = \cos^2(0) = 1 \neq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,0) = 1 \neq 0$$

Pelo Teorema da Função Implícita existem U vizinhança de (1,0) e V vizinhança de 0 e $\phi : U \to V$ tal que $\phi \in \mathcal{C}^1(U)$ e

$$\forall (x,z) \in U, \forall y \in V, \ F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x,z)$$

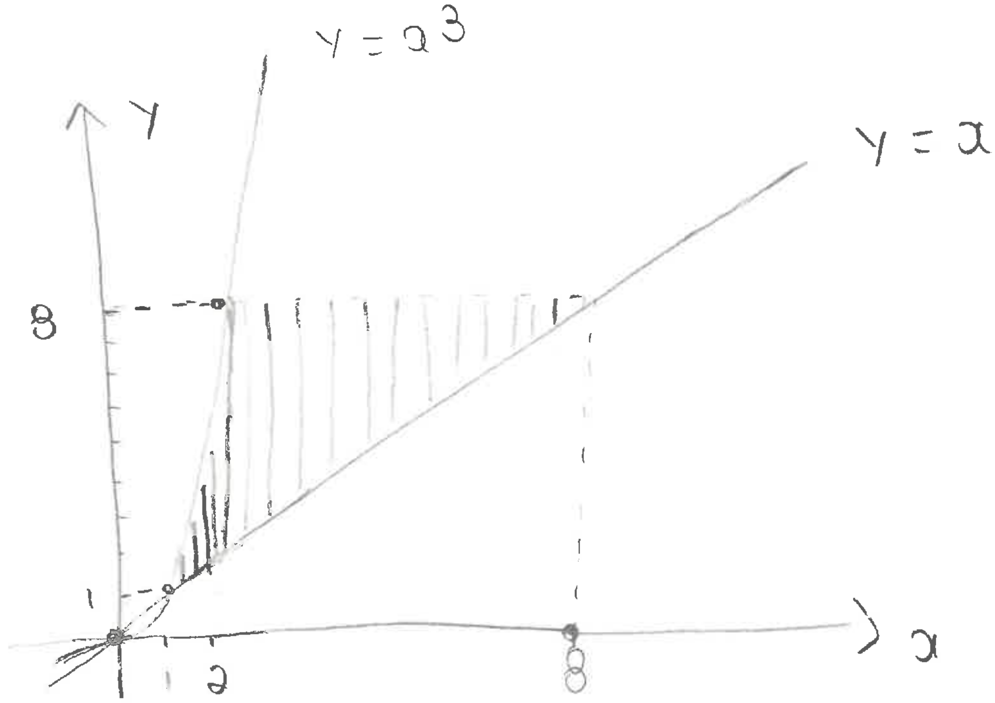
b) Como $\phi \in \mathcal{C}^1(U)$ sabemos que ϕ é diferenciável em (1,0) pelo que a direcção de descida máxima de ϕ em (1,0) é $-\nabla\phi(1,0)$.

$$-\nabla\phi(1,0) = -\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x}(1,0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z}(1,0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}} \\ \frac{\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1/2}{\sqrt{3/4}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

8

Como não nos é possível calcular as primitivas necessárias respeitando a ordem de integração indicada, experimentemos trocar a ordem de integração.



$$\int_1^2 \int_x^{x^3} \text{sem}(y^4-2y^2)\, x^2 \, dy \, dx + \int_2^8 \int_x^8 \text{sem}(y^4-2y^2)\, x^2 \, dy \, dx$$

$$= \int_1^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} \text{sem}(y^4-2y^2)\, x^2 \, dx \, dy =$$

$$= \int_1^8 \left[\text{sem}(y^4-2y^2) \frac{x^3}{3} \right]_{\sqrt[3]{y}}^{y} dy =$$

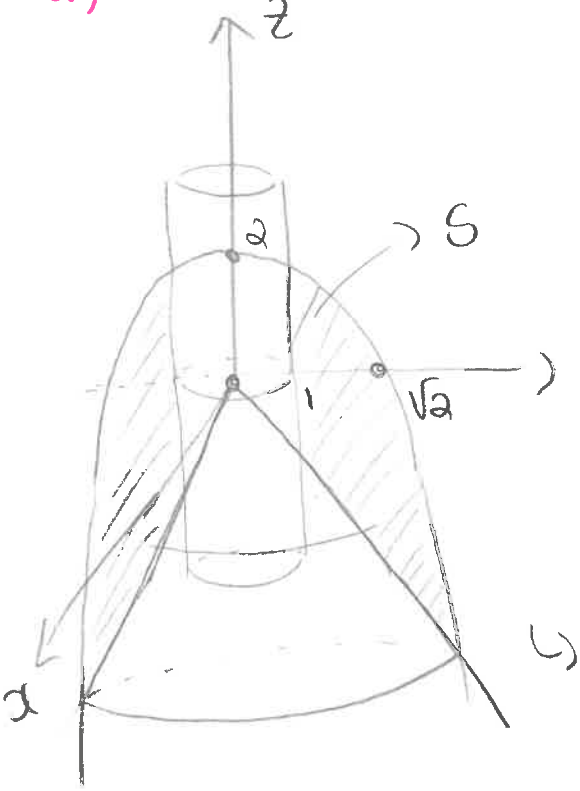
$$= \frac{1}{3} \int_1^8 \text{sem}(y^4-2y^2)\,(y^3-y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{\cos(y^4-2y^2)}{4}\right]_1^8 =$$

$$= \frac{1}{12}\left(-\cos(8^4-2\times 8^2)+\cos(-1)\right)$$

9

a)



Como o sólido é homogêneo, consideremos $d(x,y,z)=k>0$, para todo o $(x,y,z)\in S$.

$$\text{Massa} = \iiint_S d(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_S k\,dx\,dy\,dz$$

↳ Este é apenas um esboço, não feito à escala.

Usando coordenadas cilíndricas temos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 1\leq r\leq\sqrt{3} \\ y = r\sin\theta & 0\leq\theta\leq 2\pi \\ z = z & -\frac{r}{\sqrt{3}}\leq z\leq 2-r^2 \end{cases}$$

$$z = -\sqrt{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}} = -\sqrt{\frac{r^2}{3}} = -\frac{r}{\sqrt{3}}$$

$$z = 2-x^2-y^2 = 2-r^2$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 - z \\ z = -\sqrt{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 2-z \\ z^2 = \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3z^2+z-2=0 \\ x^2+y^2 = 3z^2 \end{cases}$$

$$3z^2+z-2=0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1\pm 5}{6} = \begin{cases} -1 \\ \cancel{\frac{4}{6}} \end{cases}$$

pois $z<0$

$$\begin{cases} z=-1 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$$

$$\text{Massa} = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{3}}\int_{-\frac{r}{\sqrt{3}}}^{2-r^2} k r \, dz \, dr \, d\theta$$

b)

$$\text{Massa} = 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} \left[k r z \right]_{-\frac{r}{\sqrt{3}}}^{2-r^2} dr =$$

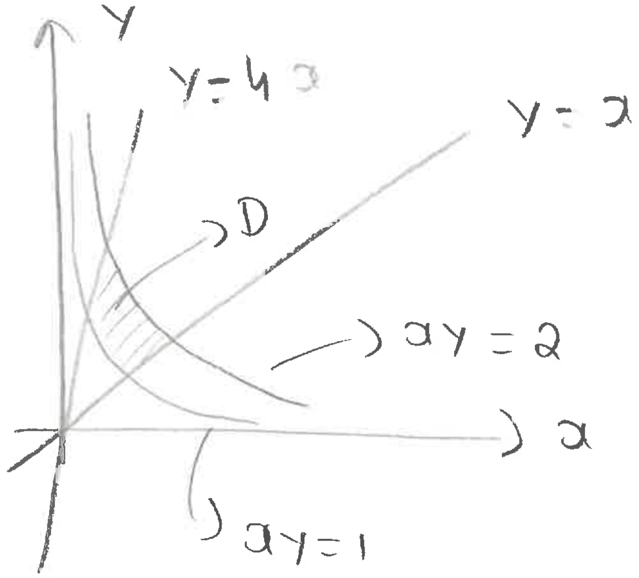
$$= 2\pi k \int_1^{\sqrt{3}} 2r - r^3 + \frac{r^2}{\sqrt{3}} \, dr =$$

$$= 2\pi k \left[r^2 - \frac{r^4}{4} + \frac{r^3}{3\sqrt{3}} \right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\pi k \left(3 - \frac{9}{4} + \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}} \cancel{-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$= 2\pi k \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right)$$

(10) (16)



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq xy \leq 2\}$$

$$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{\cancel{\sqrt{u}}\sqrt{v}}{\cancel{\sqrt{u}}}\sqrt{v} \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq \frac{\sqrt{u}}{\cancel{\sqrt{v}}}\sqrt{u}\cancel{\sqrt{v}} \leq 2\}$$

$$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq v \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq u \leq 2\}$$

$T: R \to D$

$(u,v) \to (x,y) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)$ com $R = [1,2] \times [1,4]$

$$\text{Jac}\,T(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{v}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{Jac}\,T(u,v)) = \frac{\cancel{\sqrt{u}}}{4\cancel{\sqrt{u}}\,v} + \frac{1}{4}\frac{\cancel{\sqrt{v}}\cancel{\sqrt{u}}}{v\cancel{\sqrt{v}}\cancel{\sqrt{u}}} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}$$

$$|\det(\text{Jac}\,T(u,v))| = \left|\frac{1}{2v}\right| = \frac{1}{2v}$$

Άρα

$$\iint_D f(xy)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_1^4 f(u)\,\frac{1}{2v}\,dv\,du =$$

$$= \int_1^2 \left[f(u)\ \frac{1}{2}\log v \right]_1^4 du =$$

$$= \int_1^2 f(u)\,\frac{1}{2}\log 4\,du =$$

$$= \log(\sqrt{4}) \int_1^2 f(u)\,du = \log 2 \int_1^2 f(u)\,du$$