FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 2º Semestre 2019/20

Exame de Época 2 — 14 de Julho de 2020
(Duração 3h)

Parte I

1. No início de um exame tomográfico, um paciente recebeu 27 g de um determinado elemento químico, sob a forma de contraste endovenoso, por forma a melhor identificar as anomalias existentes.

   (a) **[0.5 val.]** Recorrendo ao modelo de decaimento exponencial, modele matematicamente a situação descrita, definindo o problema de valor inicial que lhe corresponde.

   (b) **[0.5 val.]** Determine a solução do problema de valor inicial definido na alínea anterior.

   (c) **[0.5 val.]** Determine o tempo de meia-vida do elemento químico administrado, sabendo que ao fim de uma hora restavam apenas 26.9 g do mesmo.

2. **[1.5 val.]** Determine a família de soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem:
$$x^3 + x^3y^4 = y\,y'e^{-x^2}$$

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-2)\} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = x(y+2)\log(x^2 + (y+2)^2) + x$$

   (a) **[1.0 val.]** Mostre que é possível prolongar f por continuidade a $(0,-2)$ e defina a respectiva função prolongamento, $\bar{f}$.

   (b) **[1.5 val.]** Mostre que $\bar{f}$ é diferenciável em $(0,-2)$.

   (c) **[0.5 val.]** Determine uma aproximação de primeira ordem ao valor de $\bar{f}(0.02,-1.999)$.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$f(x,y) = (e^x \mathrm{arctg}(x+y)\,,\, \log(x^2+y^2)\cos(x^3 y)).$$

   (a) **[1.5 val.]** Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e calcule a respectiva matriz jacobiana.

   (b) **[1.0 val.]** Considere ainda uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Sabe-se que $\nabla g(1,0) = [1 \;\; 2]^\top$ e que $\nabla g(\frac{e\pi}{4}, 0) = [-1 \;\; 3]^\top$. Justifique que $g \circ f$ é diferenciável em $(1,0)$ e calcule $\nabla(g \circ f)(1,0)$.

5. **[1.5 val.]** Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Considere a mudança de variáveis definida por $x = u + v$ e $y = u - v$. Sabendo que $f(x,y) = g(u,v)$ e que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, mostre que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$$

Parte II

6. Considere a equação

$$\operatorname{sen}\left(e^{x^3y}+3z-1\right)+\operatorname{arctg}(xz+y^2)=-1$$

   (a) **[1.0 val.]** Mostre que esta equação define x como função implícita de y e z ($x=\phi(y,z)$) numa vizinhança de $(0,0,\frac{\pi}{2})$. Justifique detalhadamente a sua resposta.

   (b) **[1.0 val.]** Determine, justificando, $\phi'_{(3,-2)}(0,\frac{\pi}{2})$.

7. **[1.5 val.]** Uma caixa tem um dos seus vértices no ponto $(0,0,0)$ e todas as arestas paralelas aos eixos coordenados. Se o vértice diagonalmente oposto ao vértice localizado em $(0,0,0)$ pertencer ao primeiro octante e ao plano definido por $3x+2y+z=1$, qual a posição deste vértice que maximiza o volume da caixa?

8. Considere o domínio plano D, definido por

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9 \wedge y\leq x \wedge x\geq 1\right\}$$

   (a) **[1.5 val.]** Usando coordenadas polares e recorrendo a um único integral duplo, represente o cálculo da área do domínio D.

   (b) **[1.0 val.]** Determine o valor da área de D.

9. Considere o parabolóide de equação $z=x^2+y^2$ e seja S o sólido definido por:

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq z\leq x^2+y^2 \wedge x^2+y^2+z^2\leq 2\right\}$$

   (a) **[1.5 val.]** Usando coordenadas esféricas, represente o volume do sólido S na forma de um único integral triplo.

   (b) **[1.0 val.]** Calcule o volume de S.

10. **[1.5 val.]** Seja $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere $x_*\in\mathbb{R}^n$. Seja $\{v_1,\ldots,v_m\}$ um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ tal que para cada $u\in\mathbb{R}^n$ existem reais não negativos $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ que satisfazem

$$u=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i.$$

    Mostre que se

$$\nabla f(x_*)^\top v_i\geq 0, \forall i\in\{1,\ldots,m\}$$

    então x_* é um ponto estacionário de f.