FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemátira

Análise Matemática II E – 2º Semestre 2019/20

Exame de Época 1 — 18 de Junho de 2020
(Duração 3h)

Parte I

1. **[2.0 val.]** Determine a família de soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$\frac{y'}{y} + x\,\mathrm{sen}(x^2) = e^{\frac{\cos(x^2)}{2}}\,\frac{\mathrm{arctg}(x)}{y}$$

2. Na preparação de uma gelatina começa-se por dissolver o pó em água quente. Quando este preparado atinge uma temperatura de $28°C$ é colocado no interior de um frigorífico, à tempertura de $4°C$, para que solidifique.

   (a) **[0.5 val.]** Considerando o modelo associado à lei da variação da temperatura de Newton, represente matematicamente a situação descrita, definindo o problema de valor inicial que lhe corresponde.

   (b) **[0.5 val.]** Determine a solução do problema de valor inicial definido na alínea anterior.

   (c) **[0.5 val.]** Ao fim de uma hora, a temperatura da gelatina baixou $3°C$. Sabendo que é necessário que atinja os $13°C$ para que solidifique, quanto tempo será necessário esperar para que tal suceda?

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = (e^{xy} - 1)\frac{xy^2}{(x-1)^2 + y^2}$$

   (a) **[1.0 val.]** Mostre que é possível prolongar f por continuidade a $(1,0)$ e defina a respectiva função prolongamento, $\bar{f}$.

   (b) **[1.0 val.]** Determine $\bar{f}'_{(-1,2)}(1,0)$.

   (c) **[1.0 val.]** Mostre que não é possível prolongar f a $(1,0)$, por forma a que a função prolongamento seja diferenciável em $(1,0)$.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. **[2.0 val.]** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e considere

$$u(x,y) = xy\, f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$$

Mostre que para $x \neq 0 \wedge y \neq 0$, u satisfaz a equação

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y)\, u,$$

determinando a função linear $g(x,y)$.

5. **[1.5 val.]** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Seja $\{u_1, u_2\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e suponhamos que

$$f'_{u_i}(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall i \in \{1,2\}.$$

Mostre que f é constante.

Parte II

6. **[2.0 val.]** Determine e classifique como possíveis extremos, os pontos estacionários de:

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$$

7. Considere a equação

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2x} + y^2\right) = \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}(y\, e^{zx})$$

   (a) **[1.0 val.]** Mostre que esta equação define y como função implícita de x e z ($y = \phi(x,z)$) numa vizinhança de $(1,0,0)$. Justifique detalhadamente a sua resposta.

   (b) **[1.0 val.]** Determine, justificando, qual a direcção de descida máxima para ϕ em $(1,0)$.

8. **[2.0 val.]** Calcule o valor da soma de integrais:

$$\int_1^2 \int_x^{x^3} \operatorname{sen}(y^4 - 2y^2)\, x^2 dy\, dx + \int_2^8 \int_x^8 \operatorname{sen}(y^4 - 2y^2)\, x^2 dy\, dx$$

9. Considere o parabolóide de equação $z = 2 - x^2 - y^2$ e a superfície cónica definida por $z = -\sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}}$. Seja S o sólido homogéneo definido por:

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 - z \wedge z \geq -\sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}} \right\}$$

   (a) **[1.2 val.]** Usando coordenadas cilíndricas e recorrendo a um único integral triplo, represente o cálculo da massa do sólido S.

   (b) **[0.8 val.]** Calcule a massa do sólido S.

10. **[2.0 val.]** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$ e considere o domínio limitado $D \subset \mathbb{R}^2$, do primeiro quadrante, definido pelas linhas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ e $y = 4x$. Considerando $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ e $y = \sqrt{uv}$ mostre que:

$$\int \int_D f(x\, y)\, dx dy = \log(2) \int_1^2 f(u)\, du$$