FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 1º Semestre 2019/20

2º Teste — 18 de Dezembro de 2019
(Duração 1:30)

1. Considere a equação

$$z\cos(yx) + \operatorname{arctg}(z^2x) = 2$$

   (a) **[1.5 val.]** Mostre que esta equação define x como função implícita de y e z $(x = \phi(y,z))$ numa vizinhança de $(0,-1,2)$. Justifique detalhadamente a sua resposta.

   (b) **[2.0 val.]** Será $(-1,2)$ um ponto estacionário de ϕ? Justifique.

2. Considere a superfície definida pela equação $z = f(x,y) = \frac{3}{e^x} - 4x + xy^2$ e a superfície cilíndrica correspondente a $x^2 + y^2 = 4$.

   (a) **[1.0 val.]** Justifique que f atinge um valor máximo e um valor mínimo na superfície cilíndrica considerada.

   (b) **[2.0 val.]** Determine os valores máximo e mínimo da função f na superfície cilíndrica considerada e o(s) ponto(s) onde são atingidos.

3. Considere o domínio plano D, definido por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge -y \leq x \leq \frac{y}{2} \wedge y \geq 1\right\}$$

   (a) **[2.0 val.]** Usando coordenadas polares e recorrendo a um único integral duplo, represente o cálculo da área do domínio D.

   (b) **[1.5 val.]** Calcule o valor da área de D.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere o parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$ e a superfície cónica definida por $z = -\sqrt{\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5}}$. Seja S_1 o sólido definido por:

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5}} \leq z \leq x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$$

   (a) **[2.0 val.]** Usando coordenadas cilíndricas e recorrendo a um único integral triplo, represente o cálculo do volume do sólido S_1.

   (b) **[1.5 val.]** Calcule o volume do sólido S_1.

5. Considere a esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e a superfície cónica de equação $z = -\sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}}$. Seja S_2 o sólido definido por:

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq -\sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge y \geq 0 \right\}$$

   Assuma que em cada ponto $(x, y, z) \in S_2$ a densidade do sólido é dada por $d(x, y, z) = 1 + y$.

   (a) **[2.0 val.]** Usando coordenadas esféricas, represente o cálculo da massa de S_2 na forma de um único integral triplo.

   (b) **[1.5 val.]** Calcule o valor da massa de S_2.

6. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se côncava se:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

   Assuma que f é diferenciável e côncava em $\mathbb{R}^n$.

   (a) **[2.0 val.]** Mostre que

$$\nabla f(x)^\top (y - x) \geq f(y) - f(x) \quad , \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

   (b) **[1.0 val.]** Conclua que se x_* é um ponto de extremo relativo de f então $f(x_*)$ é um máximo absoluto da função.