FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 1º Semestre 2018/19

2º Teste — 17 de Dezembro de 2018
(Duração 1:30)

1. Considere a equação

$$e^{zy}\mathrm{sen}(xy) + \cos(y^2) + zx = -1$$

   (a) **[2.0 val.]** Mostre que esta equação define y como função implícita de x e z $(y = \phi(x,z))$ numa vizinhança de $(-1,0,2)$. Justifique detalhadamente a sua resposta.

   (b) **[2.0 val.]** Justifique que a função ϕ é diferenciável em $(-1,2)$. Determine uma aproximação linear ao valor de $\phi(-0.09, 1.98)$.

2. **[4.0 val.]** Considere a lâmina $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, cuja densidade em cada ponto (x,y) é dada pelo valor da função $d(x,y) = x^2 + 2y^2 - x + 3$. Determine os pontos correspondentes às densidades máxima e mínima da lâmina.

3. Seja D o domínio plano definido por:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\right\}$$

   (a) **[2.0 val.]** Utilizando coordenadas polares, represente o cálculo da área de D na forma de um único integral duplo.

   (b) **[1.0 val.]** Calcule a área de D.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere o parabolóide de equação $z = 7 - x^2 - y^2$ e o hiperbolóide definido por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Seja S_1 o sólido definido por:

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 - z^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2) \vee (z \leq 7 - x^2 - y^2 \wedge z \geq 2)\right\}$$

   (a) **[2.0 val.]** Recorrendo a integração tripla e usando coordenadas cilíndricas, represente o cálculo do volume do sólido S_1.

   (b) **[1.0 val.]** Calcule o volume de S_1.

5. Considere as superfícies esféricas de equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

   Seja S_2 o sólido correspondente a:

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 + (z-1)^2 \geq 1 \wedge z \geq 0\right\}$$

   Assuma que em cada ponto $(x, y, z) \in S_2$ a densidade do sólido é dada por $d(x, y, z) = z^2$.

   (a) **[2.0 val.]** Usando coordenadas esféricas, represente o cálculo da massa de S_2 na forma de um integral triplo.

   (b) **[1.0 val.]** Calcule o valor da massa de S_2.

6. **[3.0 val.]** Seja $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Considere a curva de equação $y = h(z)$, com $a \leq z \leq b$, e o sólido S_3 obtido por revolução de 2π radianos em torno do eixo Oz da curva mencionada. Assuma que em cada ponto $(x, y, z) \in S_3$ a densidade é dada por $d(x, y, z) = h'(z) > 0$. Mostre que a massa do sólido é dada por:

$$\frac{\pi}{3}\left(h(b)^3 - h(a)^3\right)$$