2017/2018	Soluções da Ficha Prática 1 - Equações Diferenciais Ordinárias	AM2E

1.

a. EDO de segunda ordem; solução geral.

b. EDO de primeira ordem; solução particular.

c. EDO de primeira ordem; solução particular.

d. EDO de primeira ordem; solução geral.

3.b. $y(x) = \frac{\log(x)+4e^2-2}{x}$, com $x \in \mathbb{R}^+$

4.a. A equação admite a solução estável ou em equilíbrio $y(x) = -1$, com $x \in \mathbb{R}$.

5.

a. EDO de primeira ordem.

b. Sim, é solução da equação diferencial em $\mathbb{R}$.

c. Sim, é uma solução particular, correspondendo a $c = 2$.

d. Solução singular da EDO.

6.

a. $y(x) = 100 + c\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$

b. $y(x) = c\,e^{5x-5\log|1+x|}$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$y(x) = 0$, com $x \in \mathbb{R}$

c. $y(x) = c\,e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}_0^+$

d. $y(x) = -\frac{\cos(x)}{x} + \frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{c}{x^2}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e. $y(x) = \frac{x+c}{\sin(x)}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

f. $y(x) = \frac{3}{2}\sin(2x) + \frac{3}{4x}\cos(2x) + \frac{c}{x}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

7.

a. $y(x) = \frac{\log(-x)+e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}}$, com $x < 0$

b. $y(x) = x\cos(x) + 2\cos(x)$, com $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

8.

a. $y(x)^2 + y(x) = x^2 + c$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -c - \frac{1}{4}\}$

b. $y(x) = \sqrt[3]{-\frac{3}{x} + 3x + c}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c. $y(x) = \frac{\log(2e^x+c)}{2}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \{x \in \mathbb{R} : 2e^x + c > 0\}$

d. $y(x) = 1 + \frac{1}{1-ce^x}$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $x \in \{x \in \mathbb{R} : 1 - ce^x \neq 0\}$
$y(x) = 1$ e $y(x) = 2$, com $x \in \mathbb{R}$

e. $\frac{y(x)^2}{2} = \frac{\log|1+x^3|}{3} + c$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \wedge \frac{\log|1+x^3|}{3} + c \neq 0\}$

f. $y(x) = c\,x^x e^{-x}$, com $c \in \mathbb{R}$ e com $x \in \mathbb{R}^+$

9.

a. $y(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2x} + c\,e^{-3x}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$

b. $y(x) = c\,e^{\frac{\log^2(x)}{2}}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^+$

c. $y(x) = \log\left(-\log|\cos(x)| + c\right)$, com $c \in \mathbb{R}$ e
$x \in \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0 \wedge -\log|\cos(x)| + c > 0\}$

d. $\tan(2y(x)) = x + \frac{\sin(2x)}{2} + c$, com $c \in \mathbb{R}$
$y(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$

e. $y(x) = \frac{-x-\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+c}{\sqrt{1+x^2}}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$

f. $\log|y(x)| + y(x)^2 = \sin(x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$
$y(x) = 0$, com $x \in \mathbb{R}$

10.b. $y(x) = \sqrt[3]{\frac{e^{3x}}{c-3x}}$, com $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{c}{3}\}$
$y(x) = 0$, com $x \in \mathbb{R}$

11.b. $y(x) = \frac{cx^2}{1-cx}$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{c}\}$
$y(x) = 0$ e $y(x) = -x$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

12. $y(x) = \sqrt{1-x^2}$, com $x \in]-1, 1[$

13. $y'(x)(xe^{y(x)} + e^x) = -e^{y(x)} - y(x)e^x$

14. $y(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 27}$, com $x \in \mathbb{R}$

15. $5\,900\,000\,000 e^{0.0133 \times 25}$ habitantes

16. $\frac{\log(50)}{0.02}$ dias

17. $\frac{5\log(0.5)}{\log(0.35)}$ dias

18.

a. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = ky \\ y(0) = 10 \\ y(140) = 5 \end{cases}$

b. $10e^{0.5\log(0.5)}$ mg

c. $140\frac{\log(0.3)}{\log(0.5)}$ dias

19. $5730\frac{\log(0.785)}{\log(0.5)}$ anos

20. $\frac{\log(\frac{7}{12})}{\log(\frac{11}{12})}$ horas

21. Associe a cada equação diferencial a representação gráfica do seu campo de direcções.

a. segunda fila, à esquerda

b. primeira fila, à direita

c. primeira fila, à esquerda

d. segunda fila, à direita

23.
a. $y(1) \simeq 5.781$

b. $y(1) \simeq 5.960$

c. $y(1) \simeq 4.903$

24.
a. Com $h = 0.1$ temos $y(1) \simeq 112.714$ e $y(2) \simeq 96.377$
Com $h = 0.01$ temos $y(1) \simeq 113.192$ e $y(2) \simeq 96.953$

b. $y(t) = 72 + 68\, e^{-t/2}$

c. A diminuição do comprimento do passo, embora implique mais cálculos na obtenção da solução, permite aumentar a precisão da mesma, pois a partir da solução analítica da EDO temos $y(1) \simeq 113.244$ e $y(2) \simeq 97.016$.

25. $h = \frac{3}{8}$.