Teorema da Função Implícita (caso geral)

Seja $F : D \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ uma função definida num aberto D e $(A, B) \in D$ com $A = (a_1, \dots, a_n)$ e $B = (b_1, \dots, b_m)$ tais que:

- $F(A, B) = 0$
- $F \in \mathcal{C}^1(D)$
- $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}(A,B) & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+2}}(A,B) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}}(A,B) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+1}}(A,B) & \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+2}}(A,B) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+m}}(A,B) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}}(A,B) & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+2}}(A,B) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}}(A,B) \end{vmatrix} \neq 0$$

Então:

- $F(x) = 0$ define implicitamente $(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ como função de $(x_1, \dots, x_n)$ numa vizinhança de (A, B).

Teorema da Função Implícita (caso geral)

Considerando $(x_{n+1},\ldots,x_{n+m})=\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ na vizinhança considerada tem-se que Φ é de classe $\mathcal{C}^1$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_n)=$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}(x,\Phi(x)) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{i-1}}(x,\Phi(x)) & -\frac{\partial F_1}{\partial x_j}(x,\Phi(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial x_{i+1}}(x,\Phi(x)) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}}(x,\Phi(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+1}}(x,\Phi(x)) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{i-1}}(x,\Phi(x)) & -\frac{\partial F_2}{\partial x_j}(x,\Phi(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial x_{i+1}}(x,\Phi(x)) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+m}}(x,\Phi(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}}(x,\Phi(x)) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{i-1}}(x,\Phi(x)) & -\frac{\partial F_m}{\partial x_j}(x,\Phi(x)) & \frac{\partial F_m}{\partial x_{i+1}}(x,\Phi(x)) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}}(x,\Phi(x)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}(x,\Phi(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+2}}(x,\Phi(x)) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}}(x,\Phi(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+1}}(x,\Phi(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+2}}(x,\Phi(x)) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+m}}(x,\Phi(x)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}}(x,\Phi(x)) & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+2}}(x,\Phi(x)) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}}(x,\Phi(x)) \end{vmatrix}}$$

Exemplo

Função Inversa

Definição

Diz-se que $f : A \to B$ *é injectiva se*

$$\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Nota: Neste caso $f(x) = k$, com $k \in f(A)$ tem uma única solução.

Proposição

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^n$. *Se* f *for injectiva existe* $g : f(A) \subseteq B \to A$ *tal que* $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in A$. *A esta função chama-se inversa de* f *e designa-se por* f^{-1}.

Teorema da Função Inversa

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto D e seja $a \in D$ tal que $|Jacf(a)| \neq 0$. Então:

- existem vizinhanças U de a e V de $f(a)$ tais que f é uma bijecção de U sobre V, logo $f^{-1} : V \to U$ está bem definida
- $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(V)$
- $Jacf^{-1}(y) = [Jacf(x)]^{-1}$ para $x \in U$ e $y \in V$, com $y = f(x)$

Exemplo

Nota: O teorema da função inversa apenas garante a invertibilidade local. Não a global.