Análise Matemática II E

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Modelos de Crescimento e Decaimento Exponencial

Quando a taxa de variação de uma certa quantidade é proporcional ao total dessa quantidade:

$$\frac{dy}{dx} = k\,y,$$

com k constante não nula.

$k > 0$ - modelo de crescimento
$k < 0$ - modelo de decaimento

Solução: $y = c\,e^{kx}, \text{ com } c \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}$

Exemplo 1

Suponha que num acidente nuclear foram libertados 10 gr do isótopo de plutónio Pu-239. Sabendo que a meia-vida deste material radiactivo é igual a 24100 anos, quanto tempo será necessário para os 10 gr decaírem para 1 gr?

Exemplo 2 - Datação por Carbono-14

Um pedaço de carvão vegetal antigo tem 15% do carbono radioactivo de um pedaço de carvão vegetal actual. Sabendo que a meia-vida do Carbono-14 é 5730 anos, há quantos anos foi a árvore queimada para fazer o carvão vegetal?

Lei da Variação da Temperatura de Newton

A taxa de variação da temperatura de um objecto num ambiente com temperatura constante é proporcional à diferença de temperatura entre a temperatura do objecto e a temperatura do ambiente.

Exemplo 3

Um copo de água a uma temperatura de 95° é colocado numa sala com uma temperatura constante de 21°. Sabendo que ao fim de um minuto a temperatura do copo é de 85°, quanto tempo demorará a atingir os 51°?

Método de Euler

Método numérico para aproximar a solução de um problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

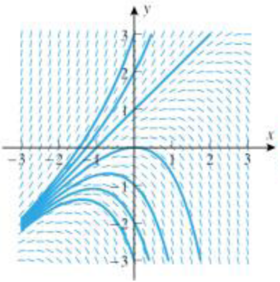
$$y(x_0) = y_0$$

Mostra as direcções ou inclinações das curvas integrais nos pontos da malha.

Exemplo

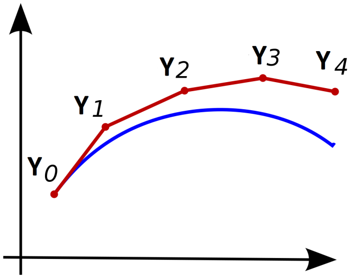
$$y' = y - x$$

	$y=-3$	$y=-2$	$y=-1$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=-3$	0	1	2	3	4	5	6
$x=-2$	−1	0	1	2	3	4	5
$x=-1$	−2	−1	0	1	2	3	4
$x=0$	−3	−2	−1	0	1	2	3
$x=1$	−4	−3	−2	−1	0	1	2
$x=2$	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
$x=3$	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0



http://www.bluffton.edu/homepages/facstaff/nesterd/java/slopefields.html

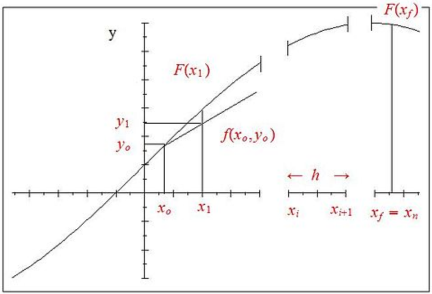
O campo de direcções é usado para aproximar a solução de um problema de valor inicial nalguns pontos, distanciados entre si uma certa quantidade fixa h.



$$\begin{array}{rl} x_0 & y_0 = y(x_0) \\ x_1 = x_0 + h & y_1 \simeq y(x_1) \\ x_2 = x_1 + h & y_2 \simeq y(x_2) \\ x_3 = x_2 + h & y_3 \simeq y(x_3) \\ x_4 = x_3 + h & y_4 \simeq y(x_4) \\ \ldots & \end{array}$$

Método de Euler

O campo de direcções é usado para aproximar a solução de um problema de valor inicial nalguns pontos, distanciados entre si uma certa quantidade fixa h.



$$
\begin{array}{rl}
x_0 & y_0 = y(x_0) \\
x_1 = x_0 + h & y_1 \simeq y(x_1) \\
x_2 = x_1 + h & y_2 \simeq y(x_2) \\
x_3 = x_2 + h & y_3 \simeq y(x_3) \\
x_4 = x_3 + h & y_4 \simeq y(x_4) \\
\ldots &
\end{array}
$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Nota: A qualidade da aproximação é melhorada com a redução de h.

Método de Euler

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = ????$$

Considere $h = 0.2$, $h = 0.1$ e $h = 0.05$.

Solução analítica: $y = e^{-x^2/2}$ logo $y(1) = e^{-1/2} \simeq 0.606531$