Análise Matemática II E

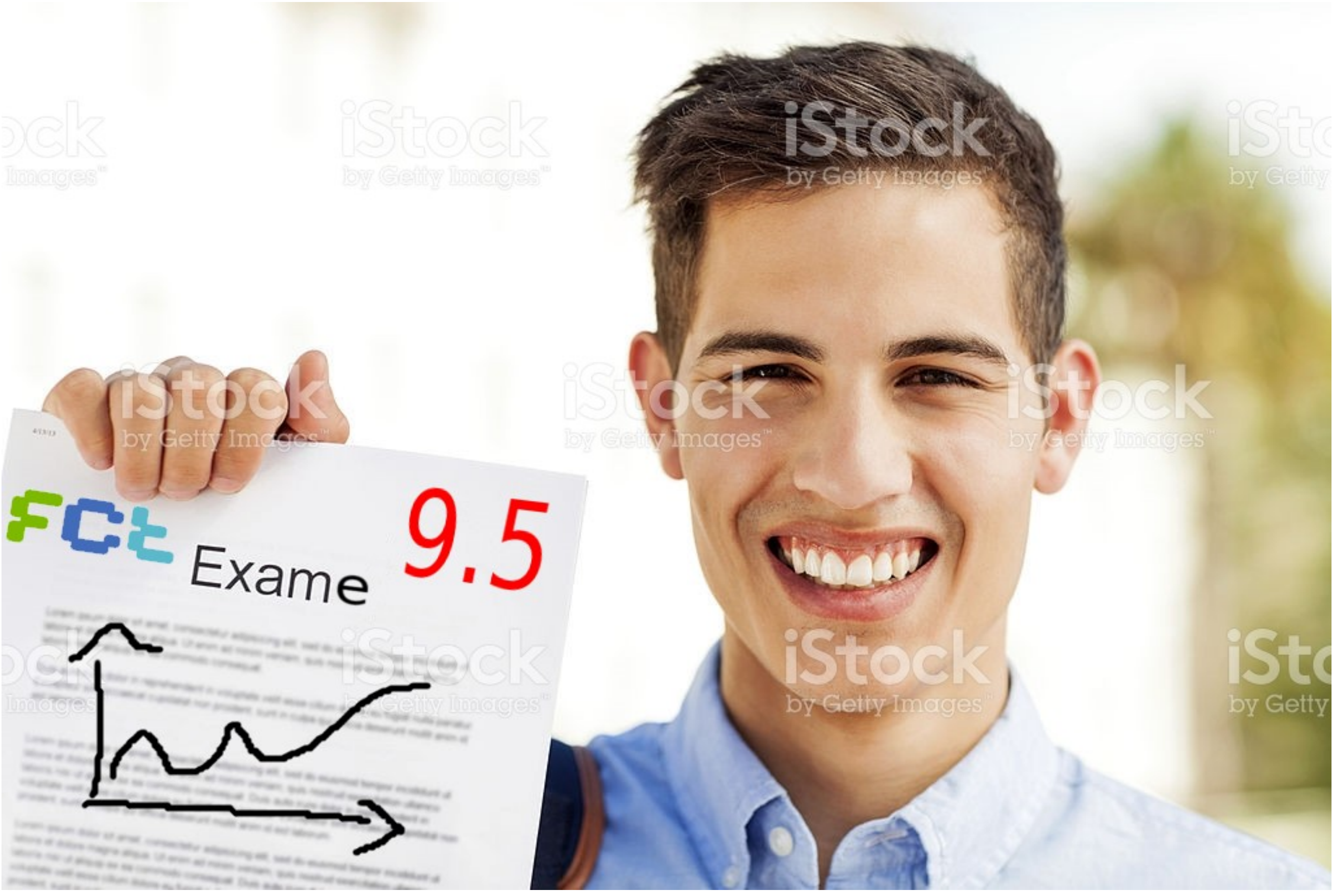
Cláudio Pereira (O verdadeiro, não o clone A.K.A. Cluedo)

Índice

Equações Diferenciais......5
Soluções de equações diferenciais......6
Problemas de valor inicial......7
Equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª ordem......8
Resolução pelo método do fator integrante......8
Resolução com variáveis separadas......8
Modelos de crescimento......9
Modelo de crescimento exponencial......9
Modelo de temperatura de newton......9
Campos de direções......10
Aproximações Lineares......11
Método de Euler......11
Topologia em R^n......12
Conjuntos numéricos multidimensionais......12
Vizinhanças......13
Noções topológicas elementares......13
Geometria Analítica......14
Linhas cónicas......14
Elipses......14
Hipérboles......14
Parábolas......15
Superfícies quadráticas......16
Degeneradas......16
Elipsoides......16
Hiperboloide de uma folha......16
Hiperboloide de duas folhas......17
Cone elíptico......17
Paraboloide elíptico......18
Paraboloide hiperbólico......18
Limites em R^n......19
Provar por definição (Cauchy):......19
Desprovar por definição(Heine):......19
Teorema das funções enquadradas......19
Limites iterados......20
Resolução com coordenadas polares......20
Remoção de descontinuidades......21
Calculo Diferencial......22
Derivadas parciais......22
Derivadas de ordens superiores a um......22
Notação alternativa......22
Teorema de Schwarz......23
Diferenciabilidade......24
Vetor Gradiente......25
Derivada Direcional......25
Jacobiana......26
Propriedades......26

Jacobiano....26
Aproximações Polinomiais (Taylor)....27
Funções de uma variável....27
Funções de múltiplas variáveis....27
Matriz Hessiana....27
Aproximação quadrática (ordem 2)....27
Estudo de extremos....28
Pontos estacionários....28
Extremos locais....28
Extremos absolutos....29
Propriedades do Gradiente....29
Maximização por Lagrange....30
Lagrangiana....30
Multiplicador de Lagrange....30
Teorema da Função Implícita....31
Teorema da Função Inversa....31
Integração Múltipla....32
Particionamento....32
Teorema de Fubini....33
Método de Cavalier para calculo de volumes....33
Conjuntos de integração....34
Conjuntos verticalmente simples....34
Conjuntos horizontalmente simples....34
Propriedades....34
Aplicações....35
Área de domínio plano....35
Volume compreendido entre o gráfico de duas funções....35
Volume de sólido....35
Massa de lamina fina....35
Massa de Sólido....35
Centro de massa de lamina fina....35
Centro de massa de um sólido....35
Momentos de inércia de uma lamina fina....36
Momento de inércia de um sólido relativamente a um eixo....36
Mudança de variáveis....37
Extremos de integração....37
Sistemas de coordenadas....38
Coordenadas polares....38
Coordenadas cilíndricas....38
Coordenadas esféricas....39
Perdidos e .. perdidos só....40

Deu de caras com isto?



Aceitam-se donativos em coisas como café!

Equações Diferenciais

Uma ***equação diferencial*** é uma equação em que incógnita é uma função $y=y(x)$ e que envolve uma ou mais derivadas desta função.

Exemplos

$2x+1=0 \rightarrow$ Não é equação diferencial
$2y^2=2x \rightarrow$ Não é equação diferencial
$2y'+y=2x \rightarrow$ É equação diferencial
$y'=2x \rightarrow$ É equação diferencial

Todas as seguintes são equações diferenciais:

- $\frac{dy}{dx}=e^{2x} \Leftrightarrow y(x)=\int e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}+C \quad \frac{dy}{dx}=f(x) \Rightarrow y(x)=\int f(x)dx$
- $\frac{dy}{dx}=3y \Leftrightarrow y'=3y \Leftrightarrow dy=3y\,dx$
    - **Nota**: Apesar de equivalentes, o ultimo formato não é desejável
- $\left[\frac{3[y(x)]^2}{2}\right]'=\frac{3}{2}\times y(x)$
- Segunda lei de Newton:
  $x(t) \Rightarrow$ Posição de particula no instante t
  $f\left(t, x(t), \frac{dy}{dt}\right)=m\frac{d^2x}{dt^2}$

Terminologia

Uma equação diferencial diz-se ***ordinária*** quando a função incógnita define uma única variável $y=y(x)$
Exemplo: $y+y'=0$ é ordinária mas $yy'+zz'=0$ não é ordinária.

A ***ordem*** de uma equação diferencial é dada pelo maior grau das derivadas que figuram na mesma.

$\frac{dx}{dy}=3y \Rightarrow$ equação de primeira ordem
$y''+y=0 \Rightarrow$ equação de segunda ordem

Soluções de equações diferenciais

Uma ***solução*** de uma equação diferencial é uma função que satisfaz a equação diferencial num curto intervalo aberto I

Pode ser dada na forma ***explicita***: $e^x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - e^x$

ou na forma ***implícita***: $\log(x+4) + \cos(xy) = 4$

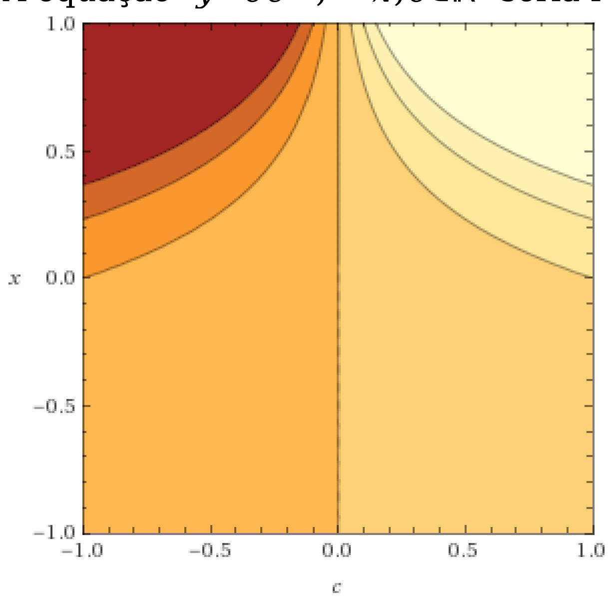
sendo as mesmas diferenciadas pela isolabilidade do y

Uma solução de uma eq. diferencial pode ser categorizada das seguintes formas:

- **Solução geral**: Toda a expressão que envolve constantes e que engloba todas as soluções.
  Nota: A solução geral de uma equação diferencial de ordem m apresenta m constantes
- **Solução particular**: Não é definida à custa de constantes arbitrarias.
- **Solução singular**: Não resulta da solução geral por particularização das constantes.
- **Solução estável (ou em equilíbrio)**: Solução constante da equação diferencial. $y(x) = k$ (Dica: $y'(x) = 0$, e por)

As soluções podem ser representadas com uma **curva integral,** um gráfico que representa as possibilidades para os diversos valores de constante.

A equação $y = ce^{3x}, \quad x, c \in \mathbb{R}$ seria representada da seguinte forma:



$C=2 \quad y = 2e^{3x}$

$C=1 \quad y = e^{3x}$

$C=0 \quad y = 0$

$C=-1 \quad y = -e^{3x}$

$C=-2 \quad y = -2e^{3x}$

Exemplos de soluções

1. $\frac{dy}{dx} = 3y \qquad y = e^{3x}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad \frac{dy}{dx} = 3e^{3x} = 3y$ é solução particular
2. $\frac{dy}{dx} = 3y \qquad y = ce^{3x}, \quad x, c \in \mathbb{R} \qquad \frac{dy}{dx} = c3e^{3x} = 3y$ é solução geral

Problemas de valor inicial

Um problema de valor inicial consiste numa equação diferencial associada a uma **condição inicial**, (a qual vai permitir a descoberta de uma solução particular do problema).

Por exemplo a equação $\frac{dy}{dx}=3y$ dada uma condição inicial $y(0)=2$ seria resolvida $y=ce^{3x} \Rightarrow 2=ce^{3\times 0} \Rightarrow c=2$.

Conclui-se que $y=2e^{3x}$ é a solução do problema de valor inicial

Equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª ordem

Uma equação diferencial é dita linear se tiver o formato $y'+p(x)y=q(x)$

Resolução pelo método do fator integrante

Sendo $P(X)=\int p(x)dx$

É obtido um **fator integrante** $\mu(x)=e^{P(x)}=e^{\int p(x)dx}$, o qual deve de ser utilizado para multiplicar todos os membros, tornando possível a seguinte observação:

$$(e^{P(x)}y)' = y'e^{P(x)}+p(x)ye^{P(x)} = e^{P(x)}(y'+p(x)y) = e^{P(x)}q(x)$$

Fica estabelecida a igualdade $(e^{P(x)}y)' = e^{P(x)}q(x)$

Sendo o processo de dedução de y o seguinte:

$$e^{P(x)}y=\int e^{P(x)}q(x)dx+c \quad \Rightarrow \quad y(x)=e^{-P(x)}\int e^{P(x)}q(x)dx+c$$

Caso particular (q(x) = 0)

Quando $q(x)=0$, a dedução pode ser feita:

$$y'+p(x)y=0 \Leftrightarrow y'=-p(x)y \underbrace{\Leftrightarrow}_{y\neq 0} \frac{y'}{y}=-p(x)$$

$$\Leftrightarrow \log(|y|)=-\int p(x)dx+c \qquad c\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow |y|=e^{-\int p(x)dx+c}$$
$$\Leftrightarrow |y|=ke^{-\int p(x)dx} \qquad k>0$$
$$\Leftrightarrow y=ke^{-\int p(x)dx} \qquad k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Resolução com variáveis separadas

Aplicável quando é possível isolar as diferentes variáveis em parcelas.

$$h(y)\frac{dy}{dx}=g(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=g(x)\frac{1}{h(y)}$$

Note-se que $g(x)$ só depende de x
$h(y)$ só depende de y

Se h e g são continuas num mesmo intervalo, com H e G as suas primitivas

$$\int h(y)\frac{dy}{dx}dx=\int g(x)dx$$
$$H(y)+c_2=G(x)+c_1$$
$$H(y)=G(x)+c_{3,} \quad c_3\in\mathbb{R}$$

← É a solução geral da equação dada na forma implícita
Note-se que o funcionamento desta lógica depende de uma mudança de variável, dai a obrigatoriedade de as variáveis serem separadas.

Modelos de crescimento

Modelo de crescimento exponencial

Dado pela equação $y'=ky$

$k>0$ → Crescimento

$k<0$ → Decrescimento

$$y'=ky \Leftrightarrow \frac{y'}{y}=k \Leftrightarrow \log(|y|)=kx+c \Leftrightarrow |y|=c_1 e^{kx} \Leftrightarrow y=c_2 e^{kx}$$

$C \in \mathbb{R}, \ C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ C_2 \in \mathbb{R}^+$

Assim sendo, $y=c_2 e^{kx}$ é a solução geral deste modelo de crescimento

Este modelo serve para modelar quantias que variam com o tempo em função delas mesmas, tais como uma população ou o decaimento de isótopos radioativos.

Modelo de temperatura de newton

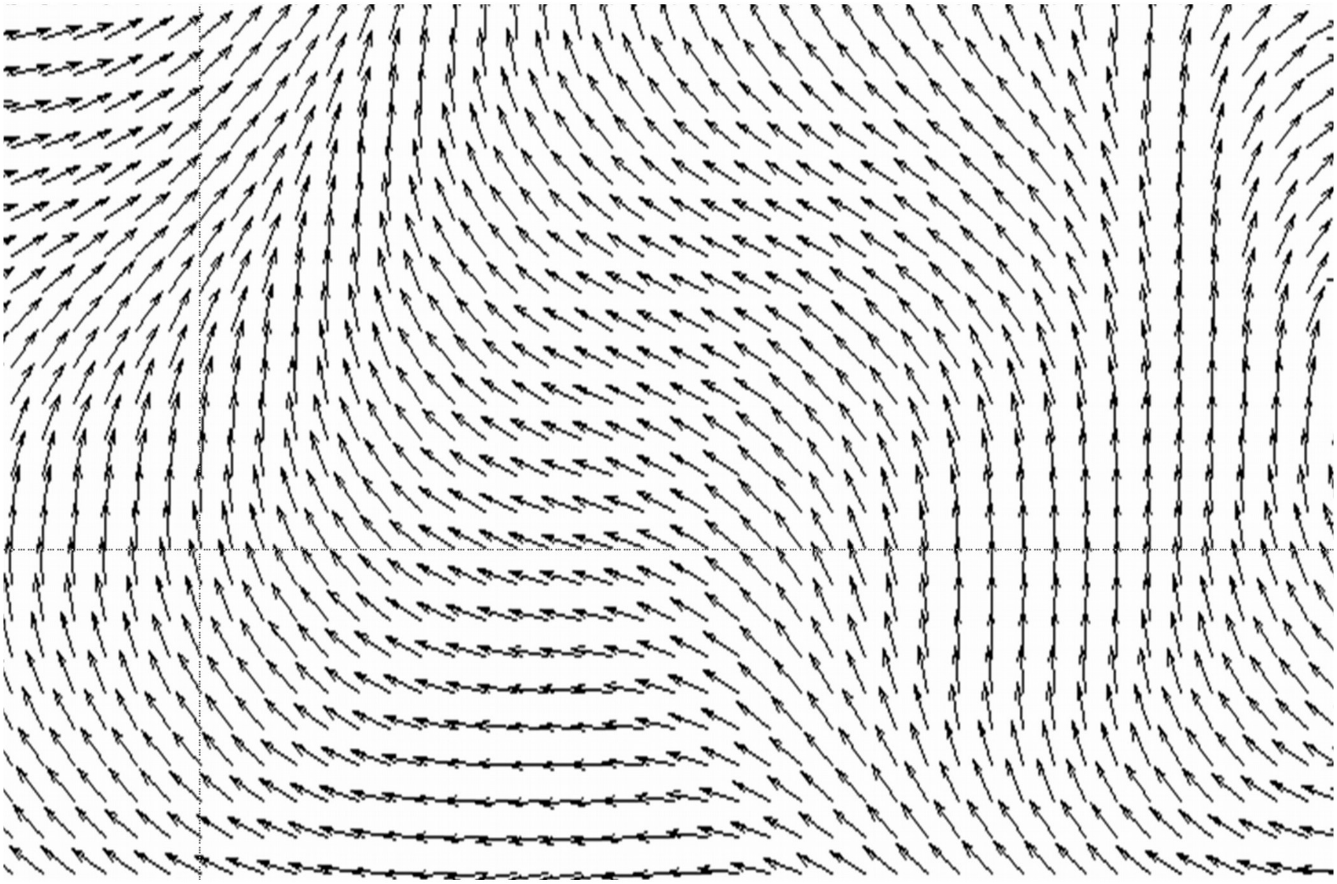
Dado pela equação $y'=k(y-a)$, em que k é a taxa de variação (condutividade térmica), e a a temperatura ambiente.

Pode ser utilizado para modelar a temperatura de um meio a dado instante, (assumindo que não há interferência externa, leia-se, a constante).

$y(t)$ → Temperatura do meio no instante t.

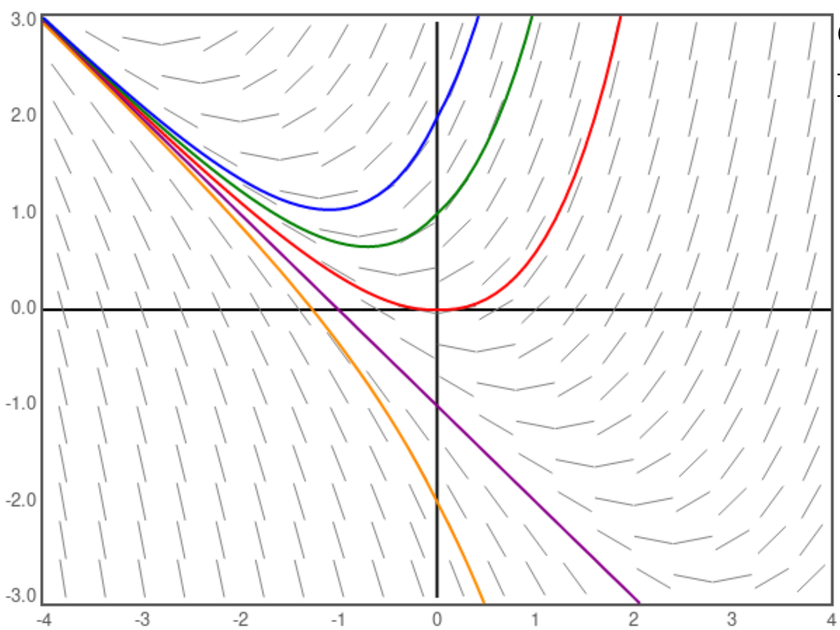
Campos de direções

Um campo de direções é uma forma de representação de equações diferenciais.



Para uma malha de pontos com um intervalo definido, é calculada a equação que a satisfaz, sendo que o declive da derivada é colocado em cada um dos pontos.

Seguindo um caminho tem-se uma solução particular da equação diferencial.



Caminhos conseguidos a partir dos pontos iniciais:

$y = -2$ (Azul)

$(0, -1)$ (Verde)

$(0, 0)$ (Vermelho)

$(0, 1)$ (Roxo)

$(0, 2)$ (Laranja)

Aproximações Lineares

Método de Euler

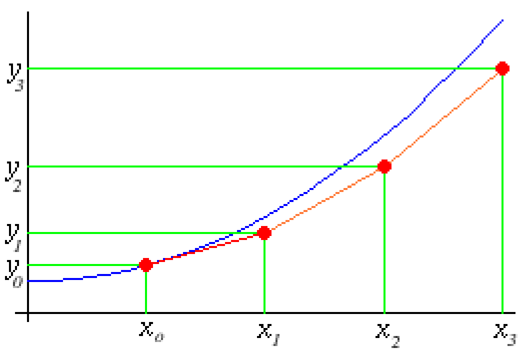
Utilizado quando se quer aproximar y_n (que corresponde a uma posição x_n) partindo de um valor inicial. O valor inicial sendo representado $(x_{0,} y_0)$.

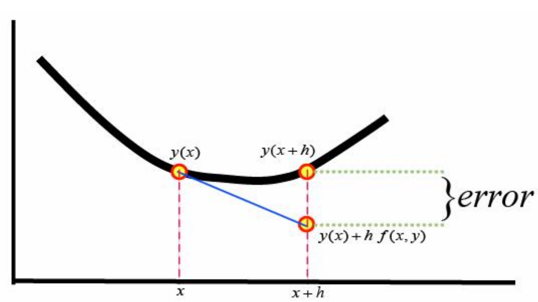
Divide-se a distancia de x_0 (valor inicial) até x_n em k segmentos idênticos.

Estabelece-se um valor h (comprimento de passo) que é igual a $\frac{|x_n - x_0|}{k}$, ou seja, o comprimento de cada um dos segmentos.

Admite-se que $(x_1, \ y_0 + h\,f(x_{0,} y_0))$ como solução intermédia.

Repete-se o processo até alcançar x_n , cuja aproximação será $(x_n, \ y_{n-1} + h\,f(x_{n-1}, y_{n-1}))$.



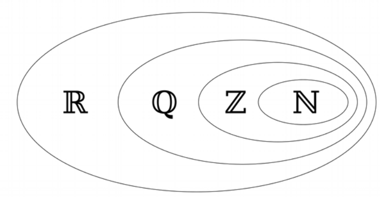


Nota: Quanto mais pequeno for o comprimento de passo e maior o numero de segmentos, melhor vai ser a aproximação.

Topologia em R^n

Conjuntos numéricos multidimensionais

Existem infinitos conjuntos numéricos dentro dos previamente conhecidos.

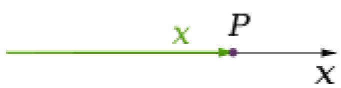


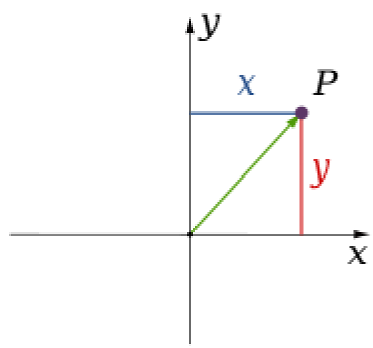
A elevação de um conjunto a numero natural confere-lhe dimensões, pelo que $\mathbb{R}$ pode ser lido $\mathbb{R}^1$, mas é possível e desejável a criação de conjuntos de varias dimensões.

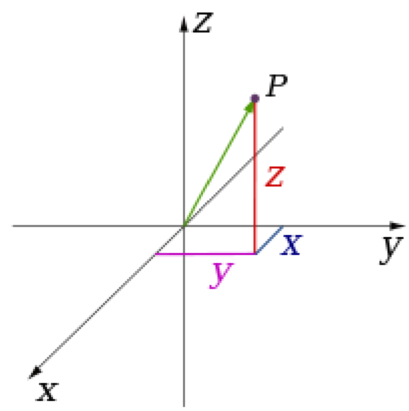
$\mathbb{R}^1$ tem uma variável real, as solução são representadas num plano.

$\mathbb{R}^2$ tem duas variáveis reais, as solução são representadas num espaço.

$\mathbb{R}^3$ tem três variáveis reais, as soluções são representadas num hiperespaço.







Vizinhanças

Uma vizinhança de centro a e raio ϵ $(a \in \mathbb{R} \wedge \epsilon > 0)$ é representada:

$$V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \epsilon\}$$

Em que $\|x-a\|$ é a norma euclidiana, sendo a mesma calculada:

$$\|y\| = \|(y_{1,} \cdots, y_n)\| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

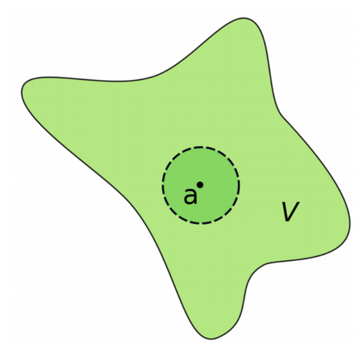
Em $\mathbb{R}$:

$$\|x-a\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2} = |x_1 - a_1| < \epsilon \;\Leftrightarrow\; a_1 - \epsilon < x_1 < a_1 + \epsilon$$

Em $\mathbb{R}^2$:

$$\|x-a\| = \|(x_{1,} x_2) - (a_{1,} a_2)\| = \|(x_1 - a_{1,} x_2 - a_2)\| =$$
$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \epsilon \;\Leftrightarrow\; (x_1 - a_1)^2 (x_2 - a_2)^2 < \epsilon$$

$\rightarrow$



Em $\mathbb{R}^3$:

$$\|x-a\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} < \epsilon$$

Nota: Em $\mathbb{R}^3$ a vizinhança é uma esfera

Noções topológicas elementares

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$

Se a for ponto **interior** de A:
$a \in \text{int}(A) \Rightarrow \exists \epsilon > 0,\ V_\epsilon(a) \subseteq A$

Se a for ponto **exterior** de A:
$a \in \text{ext}(A) \Rightarrow \exists \epsilon > 0,\ V_\epsilon(a) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$

Se a for ponto **fronteiro** de A:
$a \in \text{fr}(A) \Rightarrow \forall \epsilon > 0,\ V_\epsilon(a) \cap A \neq 0 \wedge V_\epsilon(a) \cap \mathbb{R}^n \setminus A \neq 0$

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$, chama-se **aderente** (ou fecho) de A a $\bar{A} = \text{int}(a) \cup fr(A)$

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$

- Se $A = \text{int}(a)$, A diz-se conjunto **aberto**.
- Se $A = \overline{A}$, A diz-se conjunto **fechado**

Geometria Analítica

Linhas cónicas

Linhas cónicas são representáveis num gráfico bidimensional, por base numa equação de 2º grau em x e y.

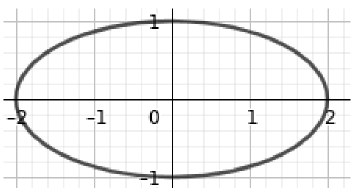
Uma linha cónica diz-se **degenerada** quando é um único ponto, ou uma reta.

Elipses

São representadas pela equação:

$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ Sendo A o raio da elipse em x, B o raio em y.

$A+B>0$, caso contrario a equação é de uma hipérbole.

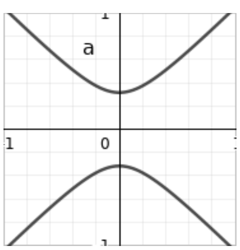


A=4, B=1

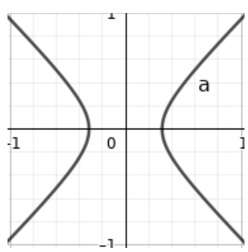
Hipérboles

Similares às elipses, mas $A\times B<0$.

$A>0$
$B<0$



$A<0$
$B>0$



Para uma hipérbole centrada na origem:

- O eixo positivo é o que detém os extremos das parábolas.
- O eixo negativo não faz parte do contradomínio.

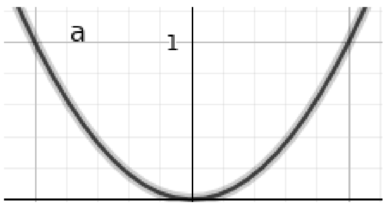
A constante positiva define a distância entre os extremos das parábolas.

Parábolas

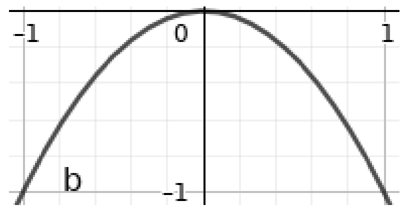
São representadas por uma equação em que uma das variáveis é do primeiro grau e a outra de segundo.

$By^{k_1}=Ax^{k_2}$ ($k_1 \otimes k_2$: Primeiro grau; $k_1 \otimes k_2$: Segundo grau)

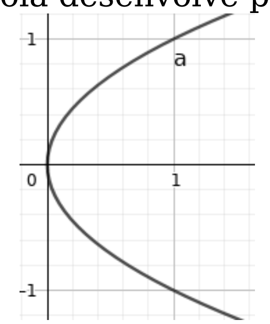
Se x^2 e $A>0$:
Parábola desenvolve para y



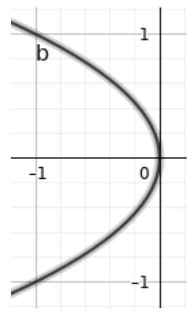
Se x^2 e $A<0$:
Parábola desenvolve para $-y$



Se y^2 e $B>0$:
Parábola desenvolve para x



Se y^2 e $B<0$:
Parábola desenvolve para $-x$



Superfícies quadráticas

Uma superfície quadrática é representada pela equação:

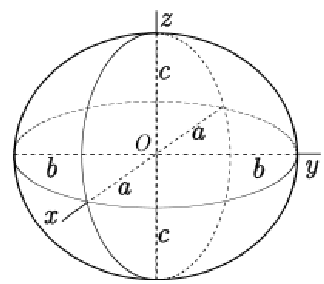
$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$

Degeneradas

- Sem pontos: $x^2+y^2+z^2+1=0$
- Um ponto: $x^2+2y^2+3z^2=0 \Leftrightarrow (x,y,z)=(0,0,0)$
- Reta: $x^2+y^2=0$ (eixo zz)
- Plano: $z^2=0 \Leftrightarrow z=0$ (plano XoY)
- Dois planos: $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y=0) \vee (x+y=0)$

Elipsoides

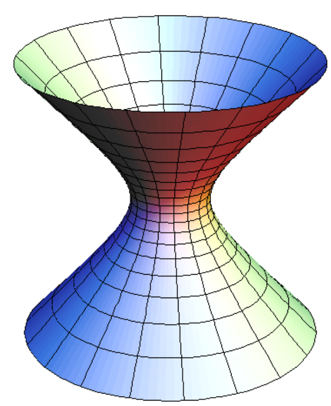
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



- Centrado na origem
- Interseção com os eixos em $(\pm a,0,0)(0,\pm b,0)(0,0,\pm c)$
- Secções paralelas aos planos são sempre elipses
- Se 2 semi-eixos iguais → Elipsoide de revolução
- Se 3 semi-eixos iguais → Esfera

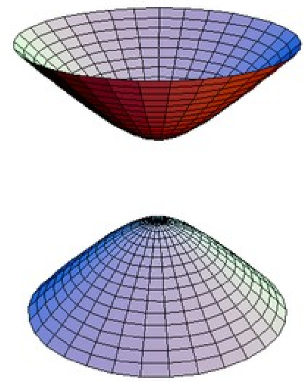
Hiperboloide de uma folha

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



- Centrado na origem
- Interseção com os eixos em $(\pm a,0,0)(0,\pm b,0)$
- Secções paralelas a XY : Elipses
- Secções paralelas a XZ : Hipérboles
- Secções paralelas a YZ : Hipérboles

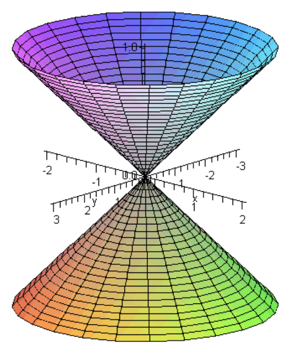
Hiperboloide de duas folhas



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

- Centrado na origem
- Interseção com os eixos em $(0,0,\pm c)$
- Secções paralelas a XY → Elipses
- Secções paralelas a XZ → Hipérboles
- Secções paralelas a YZ → Hipérboles

Cone elíptico

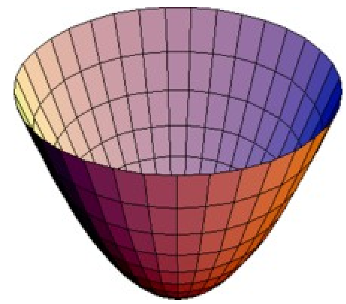


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

- Intersecta os eixos em $(0,0,0)$
- Secções paralelas a XY :
  - Caso $z=0$ → Ponto $(0,0,0)$
  - Caso contrario → Elipses
- Secções paralelas a XZ :
  - Caso $y=0$ → Duas retas concorrentes
  - Caso contrario → Hipérboles
- Secções paralelas a YZ :
  - Caso $x=0$ → Duas retas concorrentes
  - Caso contrario → Hipérboles
- Se $a=b$ → Cone de revolução

Paraboloide elíptico

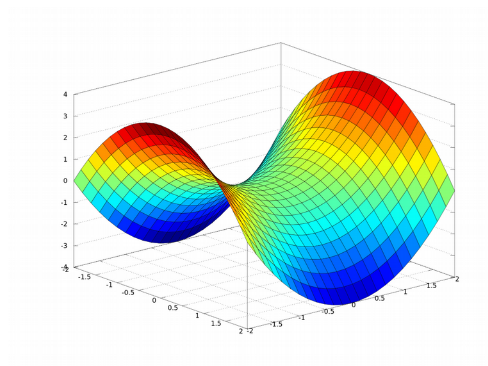
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$



- Secções paralelas a XY → Elipses
- Secções paralelas a XZ → Parábolas
- Secções paralelas a YZ → Parábolas
- $(0,0,0)$ → Vértice
- $a=b$ → Paraboloide de revolução

Paraboloide hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$



- Secções paralelas a XY :
  - Caso $z=0$ → Linhas concorrentes na origem
  - Caso contrario → Hipérboles
- Secções paralelas a XZ → Parábolas
- Secções paralelas a YZ → Parábolas
- $(0,0,0)$ → Ponto de sela ou minimax da superfície

Limites em R^n

Um limite em $\mathbb{R}^2$ está na forma $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)$.

Em $\mathbb{R}^{2^+}$ os limites tem de ser resolvidos por definição ou por exaustão de possibilidades, sendo que as possibilidades de aproximação são infinitas, contrariamente aos limites em $\mathbb{R}$ que só podem ser aproximados lateralmente.

Provar por definição (Cauchy):

$$\forall \delta>0, \exists \epsilon>0, x\in D \wedge \|x-a\|<\epsilon \Rightarrow \|f(x)-b\|<\delta$$

Tal como em $\mathbb{R}$, existe um limite se para todos os valores de δ existir um ϵ que majore a distancia ao ponto a calcular limite, em $\mathbb{R}^n$ o mesmo se aplica, sendo essa distancia a norma euclidiana.

Para um limite ser provado por definição de Cauchy, tem que ser provado em como tal ϵ existe, e qual a sua relação a δ.

Desprovar por definição(Heine):

Tendo um limite $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)$, com $a\in\overline{D_f}$, o limite é b se todas as sucessões possíveis que convergem para a fizerem f convergir para b .

Esta definição é útil caso se pretenda provar a não-existência de limite, criando sucessões que causem com que o limite dê valores diferentes.

Nota: Caso o domínio de f tenha assimptotas que sejam vizinhas a a , as sucessões que forem próximas às assimptotas tem tendência a ter resultados diferentes, no caso de não haver um limite.

> **Exemplo**: $1/n$ é uma sucessão próxima à bissetriz, se a bissetriz tender para um valor diferente, seguir essa sucessão desprovaria o limite.

Teorema das funções enquadradas

Quando se consegue minorar e majorar uma função por outras duas, e ambas essas funções tendem para um ponto, então a função intermédia, garantidamente também tende para esse ponto.

Nota: A majoração $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ frequentemente resolve problemas.
É pertinente decora-la.

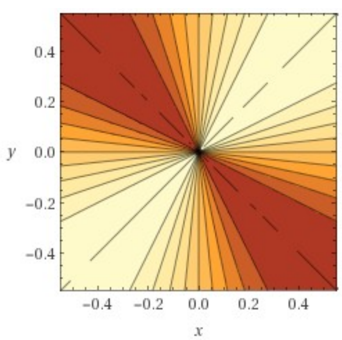
Limites iterados

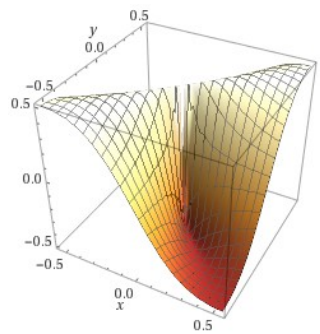
Possíveis soluções de um limite em $\mathbb{R}^2$ podem ser encontradas iterando as variáveis da seguinte forma:

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = \lim_{x\to a_1}\lim_{y\to a_2} f(x,y) = \lim_{y\to a_2}\lim_{x\to a_1} f(x,y)$$

Os **limites iterados não garantem a existência de limite**.
Note-se que a seguinte função tem o mesmo limite quando calculado com qualquer uma das iterações, ainda que não exista limite:

$$\frac{(xy)}{(x^2+y^2)}$$





Resolução com coordenadas polares

A utilização de coordenadas polares garante a exaustão de possibilidades para um limite em $\mathbb{R}^2$ uma vez que basta que uma única variável θ varie, e como tal a tendência da mesma para 0 revela a existência de limite.

A mudança de base é efetuada

$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ ou $\sqrt{x^2+y^2}=\rho^2$

E as restrições a aplicar são:

$\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ e $\rho>0$

O limite resultante tem que ficar na forma:

$\lim_{\rho\to 0} g(\rho)$, sendo que $g(\rho)$ contem θ, mas o mesmo não é uma variável, mas sim a constante referente a todos os θ possíveis.

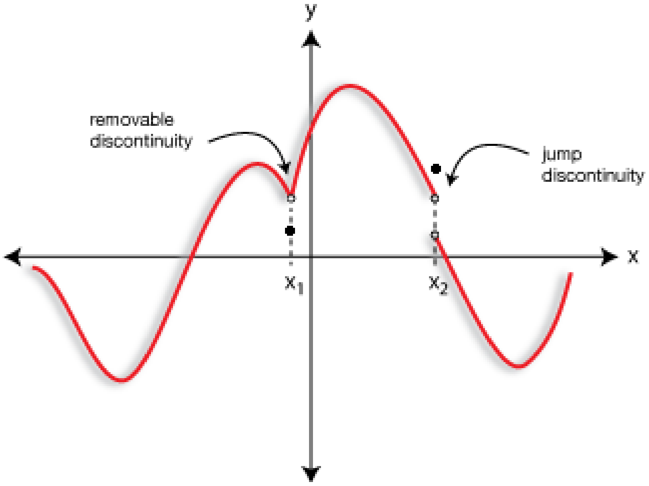
Remoção de descontinuidades

[Funciona para qualquer $\mathbb{R}^n$, apenas alterando a definição de vizinhança]

Sendo f uma função, seja a um ponto do seu domínio.

Se $\lim_{(x_{1,}\cdots,x_n)\to a} f(x_{1,}\cdots,x_n)$ existir, então f é continua na vizinhança a a .

No entanto se a for diferente do resultado do limite, (como ilustrado quando $a=x_1$), é dito que f tem uma descontinuidade removível em x_1 .



Para remover a descontinuidade é declarada uma nova função baseada em f , f' .

$$f'(x)=\begin{cases} f(x), x\neq x_1 \\ y_n \quad , x=x_1 \end{cases}$$

Quando o limite não existe, não é possível remover a descontinuidade (ver na figura $a=x_2$), não havendo nenhum ponto capaz de fazer vizinhança simultaneamente a $f(a^-)$ e $f(a^+)$.

Calculo Diferencial

Derivadas parciais

No calculo multi-variável, uma derivação total não pode ser aplicada. Cada variável tem que ser derivada à vez.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ lê-se, a "derivada parcial de f em relação à variável x".

Variáveis que não explicitamente derivadas são tratadas como constantes.

Exemplo:

$f(x,y)=\sin(xy)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos(xy)y \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\cos(xy)x$

Definição:

Sendo $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.

f diz-se de classe $C^p(A)$ se f for parcialmente derivável até à ordem p obtendo funções continuas como resultado.

Logo $f \in C^\infty(A) \Leftrightarrow f \in C^p(A), \forall p \in \mathbb{N}$ (classe infinita serve todas as classes)

Derivadas de ordens superiores a um

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \ \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \ \partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right)\right)$$

Nota: Caso as derivadas intermédias não sejam continuas, a ordem de derivação importa para o resultado (ver Teorema de Schwarz).

Notação alternativa

Uma forma compacta de representar derivadas parciais é a seguinte, e será utilizada ao longo do resumo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)=f_{xy}(a)$$

Note-se que <u>não foi utilizada nas aulas</u>.

Teorema de Schwarz

Se $f \in C^p(A)$, com $p \leq$ numero derivações a efetuar, a ordem de derivação pode ser trocada.

Exemplo:

Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \wedge \ f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ então:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \ \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$$

Diferenciabilidade

Em $\mathbb{R}$: f é diferenciável em x_0 $\Leftrightarrow$ $f'(x_0)$ existe e é finita

Em $\mathbb{R}^n$: f é diferenciável em x_0 $\Leftarrow\!/\!\Rightarrow$ as derivadas parciais existem.

Exemplo/Prova: [fazer a partir da pg. 28]

Para $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e a um ponto interior a D:
f é diferenciável em a se:

- $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)$
- $\lim\limits_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \dfrac{f(a+h) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x}(a) h_1 - \frac{-\partial f}{\partial x}(a) h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$

[ver prática 30/10]

O mesmo é verdade em $\mathbb{R}^{3^+}$ com os devidos ajustes na formula.

Uma função é diferenciável se as derivadas de uma função forem continuas.

Se $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ diferenciáveis em a (ponto interior):

- $f+g$ é diferenciável em a e
  $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$, $d(f-g)(a) = df(a) - dg(a)$.
- $f \cdot g$ é diferenciável em a
  $d(f \cdot g)(a) = f(a) dg(a) + g(a) df(a)$
- Se $g(a) \neq 0$ então f/g é diferenciável em a e
  $d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{g(a) df(a) - f(a) dg(a)}{[g(a)]^2}$

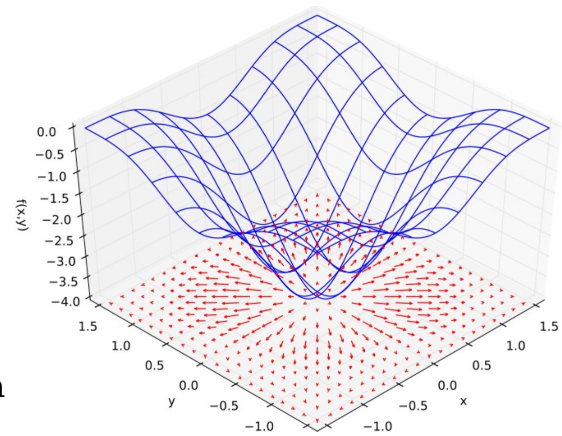
Vetor Gradiente

O gradiente é o vetor das derivadas parciais.

Representa-se ∇, e para uma função $f : D_f \in \mathbb{R}^n$ avaliada no ponto a é:

$$\nabla f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right]^T$$

O sentido do vetor gradiente indica a maior subida instantânea.
Logo o simétrico do gradiente é a direção com a maior descida instantânea.



Gradiente dos diversos pontos

Derivada Direcional

Uma derivada direcional é a taxa de variação num dado sentido da função.

A derivada de f, (função em $\mathbb{R}^n$) no ponto a segundo $\vec{u}$ é dada por:

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t}$ e representa-se $f'_{\vec{u}}(a)$.

Se $\|\vec{u}\|=1$ então a derivada é dita uma derivada direcional na direção de $\vec{u}$.

Se f for diferenciável em a (um ponto interior ao domínio), então f admite derivada em a segundo qualquer vetor e:

$$f'_{\vec{u}}(a) = \nabla f^T(a)\vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n$$

Nota: Uma função pode ter derivada num qualquer vetor num dado ponto e ainda assim não ser diferenciável.

Jacobiana

A Jacobiana é a matriz das derivadas parciais.

Sendo $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e a um ponto interior ao domínio.
Sendo f diferenciável em a então as matriz Jacobiana é definida:

$$Jac_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = [\nabla f_1(a) \nabla f_2(a) \cdots \nabla f_p(a)]^T$$

Propriedades

Com duas funções $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, e $f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^t$.
Se g diferenciável em a e f diferenciável em $g(a)$, então $f \circ g$ é diferenciável em a e $Jac_{f \circ g}(a) = Jac_f(g(a)) \times Jac_g(a)$; $d(f \circ g)(a) = df(g(a)) \circ dg(a)$

[Teórica 26/10, acabar] $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$ $Jac_{f \circ g}(x) = Jac_f(g(x)) \times Jac_g x$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \theta & (u,v) & f & z \end{array} \qquad Jac_g(x,y) = Jac_f(u(x,y), v(x,y)) \times Jac_\theta(x,y)$$

-------- $g = f \circ \theta = f(\theta(x,y))$ $\quad Jac_\theta(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$ --------------

$Jac_f(u(x,y), v(x,y)) = \left[\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y)), \frac{\partial f}{\partial v}(v(x,y)) \right]$ --------------------

$Jac_g(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \right]$ --------------------------

Jacobiano

O Jacobiano é o modulo do determinante da matriz Jacobiana.
Para uma função $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ o seu Jacobiano é:

$$|det\ Jac\, T(u,v)| = \left| det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| = \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \times \frac{\partial y}{\partial u}$$

Aproximações Polinomiais (Taylor)

Funções de uma variável

Em I intervalo aberto, $f \in C^n(I), a \in I$

$$f(a+h) = \underbrace{f(a)}_{\text{ponto}} + \underbrace{hf'(a)}_{\text{aprox. linear}} + \underbrace{\frac{h^2 f''(a)}{2!}}_{\text{aprox. quadrática}} + \underbrace{\frac{h^3 f'''(a)}{3!}}_{\text{aprox. cubica}} + \cdots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + \underbrace{h^n \epsilon(h)}_{\text{erro}}$$

A aproximação ao ponto a tem de convergir à função. $\left(\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0\right)$

Funções de múltiplas variáveis

Notação: $D_j^i = \dfrac{\partial^i}{\partial x_j}$.

Em I intervalo aberto, $f \in C^n(I), a \in I$.

$$f(a+h) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n \leq n} \frac{(D_1^{i_1} D_2^{i_2} \cdots D_n^{i_n} f)(a)}{i_1! i_1! \cdots i_n!} h_1^{i_1} h_2^{i_2} \cdots h_n^{i_n} + \|h\|^n \times \epsilon(h) \text{ . Novamente } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$$

Matriz Hessiana

Matriz das segundas derivadas parciais.

Dimensão $n \times n$, para n variáveis

Em cada coluna a variável do índice respetivo deriva primeiro.

A linha dita o índice da variável sobre a qual a segunda derivada é calculada.

Como tal a diagonal contem a mesma variável a ser duplamente derivada.

$$X = [x\, y\, z\ \cdots] \Rightarrow Hess f(X) \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx} & \cdots \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} & \cdots \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Aproximação quadrática (ordem 2)

Na aproximação quadrática do ponto $a+h$ usa-se o seguinte desenvolvimento:

$$f(a+h) = \underbrace{f(a)}_{\text{ponto}} + \underbrace{f_x(a)h_1 + f_y(a)h_2}_{\text{apróximação linear}} + \underbrace{(f_{x^2}(a)h_1^2 + f_{y^2}(a)h_2^2 + 2 f_{xy}(a)h_1 h_2)/2}_{\text{apróximação quadrática}}$$

O qual pode ser escrito na forma vetorial:

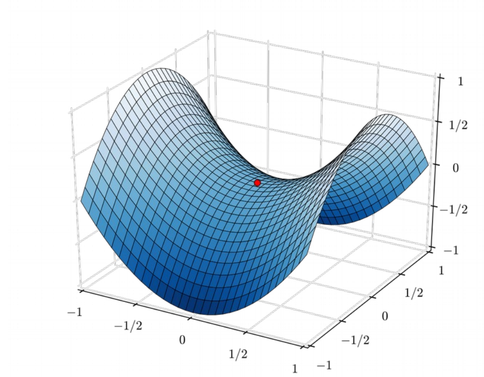
$$f(a+h) \approx \underbrace{f(a)}_{\text{ponto}} + \underbrace{\nabla f(a)^T \times h}_{\text{apróximação linear}} + \underbrace{h^T \times Hess f(a) \times h/2}_{\text{apróximação quadrática}}$$

Estudo de extremos

Pontos estacionários

Se $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ e a um ponto interior:
Quando todas as derivadas parciais de f existem no ponto a e $\nabla f(a)=0$ então a é um ponto estacionário (ou critico).

Um ponto estacionário pode ser um extremo ou um ponto de sela.



Ponto de sela

Extremos locais

Sendo $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ uma função diferenciável ou de classe C^n

- Se $det(Hess\,f(a))<0$ então $f(a)$ não é extremo (ponto de sela)
- Se $det(Hess\,f(a))>0$ então $f(a)$ é um extremo relativo.
  - Se $f_{xx}(a)>0\vee f_{yy}(a)>0$ então $f(a)$ é um mínimo relativo.
  - Se $f_{xx}(a)<0\vee f_{yy}(a)<0$ então $f(a)$ é um máximo relativo.
- Se $det(Hess\,f(a))=0$ então nada se pode concluir.

Extremos absolutos

Se f é continua num compacto, o teorema de Weierstrass garante existência de máximo e mínimo absolutos, os quais por entre os extremos relativos.

Não há nenhuma forma garantida de encontrar extremos absolutos sem ser o estudo da função.

Para restringir o domínio de forma a encontrar um extremo absoluto do sub-dominio aplicam-se os multiplicadores de Lagrange (ver abaixo, maximização por Lagrange).

Propriedades do Gradiente

Se $f(a)$ é diferenciável: $f'_{\vec{u}}(a)=d\,f(a)\cdot(\vec{u})=\nabla f(a)^T\cdot u$

$$\begin{array}{llll} f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} & \multirow{2}{*}{$f(x)=k$} & \mathbb{R}\to\ \mathbb{R}^n & f(c(t))=k \\ z=f(x) & & t\to c(t) & \nabla f(c(t))^T\times c'(t)=0 \end{array}$$

$\because \nabla f(a)$ é perpendicular às curvas de nível da função que passam no ponto a .

$z=f(x,y)\Leftrightarrow f(x,y)-z=0$ → Plano tangente a f no ponto $(a,b,f(a,b))=(a,b,c)$.

$$\nabla f(a,b,c)^T\begin{bmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{bmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow\left[f_x(a,b)\ \ f_y(a,b)-1\right]\begin{bmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{bmatrix}=0$$

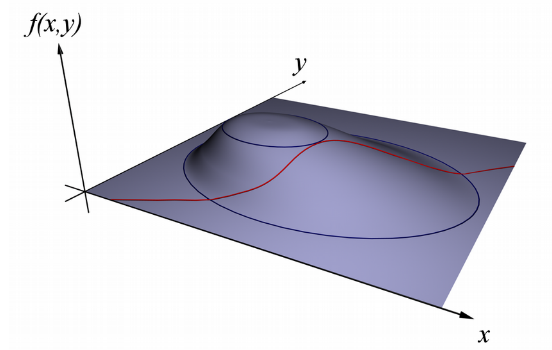
$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(x-a)-z+c=0$$

$$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \\ f(x)=f(a)+\nabla f(a)^T(x-a) \end{array}$$ → Equação do plano tangente a $f(x-a)$

Maximização por Lagrange

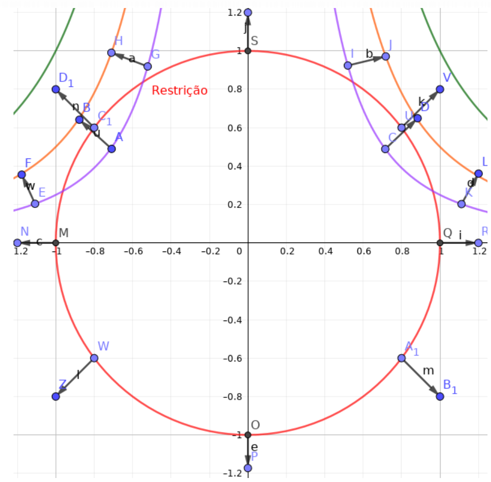
[Palavreado dá para entender mas não é 100% matematicamente correto!]

Quando se deseja maximizar uma função por base numa restrição de igualdade.
Seja f a função a maximizar, e g a restrição.



Quando um conjunto de nível intersecta g sem lhe ser tangente, então existe um numero infinito de pontos dentro da restrição, não a maximizando. Quando não intersecta g, então nenhum ponto obedece à restrição.

Para f ser máximo é necessário descobrir os argumentos que tornam f tangente a g.



Para f e g serem tangentes sabe-se que os pontos de tangência tem gradientes proporcionais (gradientes são perpendiculares aos conjuntos de nível).

Quer-se portanto satisfazer: $\nabla f = \lambda \nabla g$
λ denomina-se um multiplicador de Lagrange.

Lagrangiana

Definida $L(x, y, \cdots, \lambda) = f(x, y, \cdots) - \lambda(g(x, y, \cdots) - c)$
↖ [“L” manuscrito]

Com c sendo a constante que formula a curva de nível $g(x, y, \cdots) = c$

$\nabla L = 0$ tem o seguinte desenvolvimento: $$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = -g(x, y, \cdots) - c = 0 \end{array}$$

Por entre as soluções possíveis deste sistema estão $n \in \mathbb{N}_0$ conjuntos de argumentos que maximizam f perante a restrição.

Multiplicador de Lagrange

[Não é necessário saber]

O valor que soluciona o multiplicador de Lagrange (λ) pode ser utilizado para observar a variação instantânea da solução mediante uma alteração na restrição.
Se f for reescrita em função de c, tem-se que: $\frac{\partial f}{\partial c} = \lambda$

Teorema da Função Implícita

Para uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida num aberto $D \ni (a,b)$, se:

- $f(a,b)=0$
- $f \in C^1(D)$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$

Então:
$f(x,y)=0$ define implicitamente y como função de x numa vizinhança de (a,b).

Se $y=\phi(x)$ na vizinhança tem-se que $\phi \in C^1$ e:

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, d(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$$

Formalmente:

$f(x,y)=0$ define y implicitamente como função de x se existirem vizinhanças U de a, V de b e $\phi: U \to V$ tais que $\forall (x,y) \in U \times V, f(x,y)=0 \Leftrightarrow y-\phi(x)=0$.

(Se o ponto respeitar os requisitos, então existe uma vizinhança que também o faz, existindo um $\phi(x)$ que define y em todo o espaço da vizinhança)

Teorema da Função Inversa

Uma função $f: A \to B$ é injetiva se $\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
(É injetiva se não houverem dois pontos do domínio com a mesma imagem)

Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for injetiva, então existe $g: f(A) \to A$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$.
(Se for bijectiva tem de haver uma função que reverta a aplicação da função)

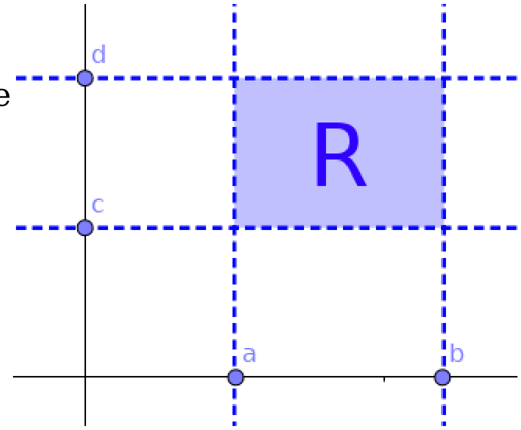
Para $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \subseteq \mathbb{R}^n$ com D aberto, $f \in C^1$, $a \in D$; se $det(Jac\, f(a) \neq 0)$:

- Existem vizinhanças U de a, V de $f(a)$ tais que f é uma bijecção de U sobre V, logo $f^{-1}: V \to U$ definida
- $f^{-1} \in C^1(V)$
- $Jac\, f^{-1}(f(x)) = [Jac\, f(x)]^{-1}$

Integração Múltipla

Particionamento

Havendo um retângulo $R \in \mathbb{R}^2$:



Se os segmentos de reta resultantes da projeção de R nos eixos coordenados forem divididos em n sub segmentos, delimitados por $n+1$ pontos e sem intersecção.

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$

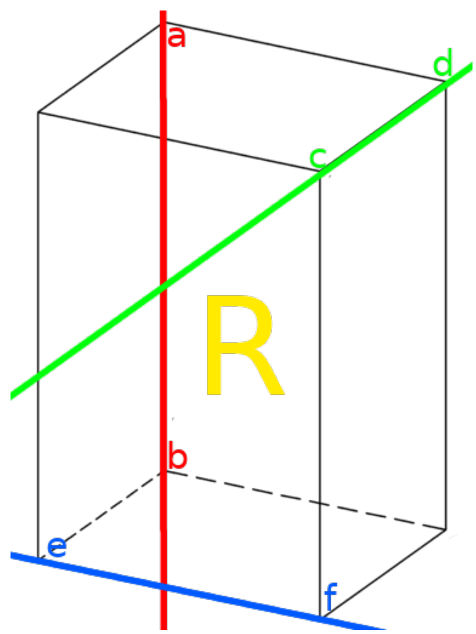
Forma-se uma grelha de n^2 retângulos sobre R em que o conjunto dos sub- retângulos (**partições**) é dado na forma: $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ $j \in \{0, \cdots, n-1\}$

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (limitada), é integrável em R , se: Sup $s_{R_{ij}}(f)$ = Inf $S_{R_{ij}}(f)$

Isto é, se a criação de k partições (em que $k \rightarrow +\infty$) faz com que o supremo (maior valor) iguale o ínfimo (menor valor) de todas as partições.

Designa-se: $\int\int_R f(x, y) dx\, dy$.

Quando se passa a operar em domínios em $\mathbb{R}^3$ (ou superiores) a metodologia é a mesma. Para um domínio restrito a um paralelepípedo faz-se uma grelha com sub-paralelepípedos (em ambas as dimensões, imagine-se um cubo feito com vários sub-cubos).



Designa-se: $\int\int\int_R f(x, y, z) dx\, dy\, dz$.

Teorema de Fubini

O integral duplo de uma função continua definida num domínio limitado por constantes (retangular, parelelipípedrico, hiperparalelipípedrido) pode ser resolvido primeiro em ordem a qualquer uma das variáveis, sem ser necessário ajustar os extremos.

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{c_1}^{c_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \cdots$$

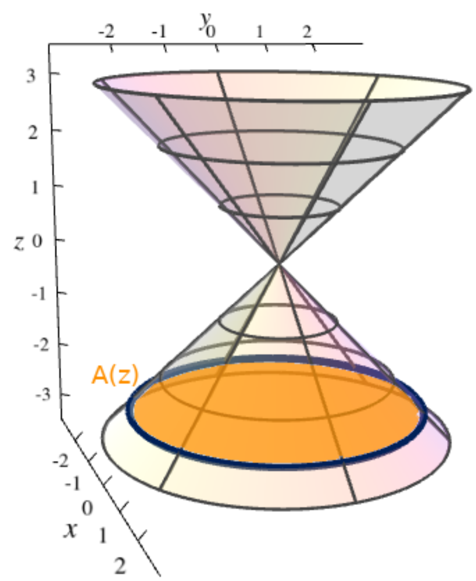
Note-se que há $n!$ permutações possíveis, para uma serie de n integrais.

Método de Cavalier para calculo de volumes

Tendo uma função $A(z)$ que dê a área de todas as "fatias" possíveis do sólido, o volume do sólido pode ser calculado com o integral:

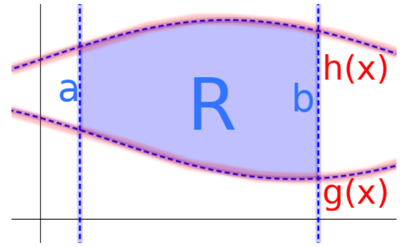
$\int_a^b A(z)dz$, em que os extremos do integral são os pontos de inicio e fim do sólido no eixo perpendicular às "fatias".

Esse $A(z)$ pode ser o resultado de um integral que calcule a área da dita fatia.



Conjuntos de integração

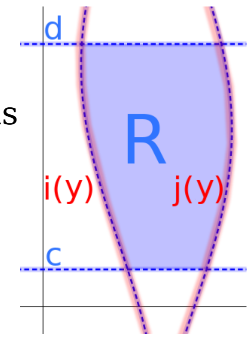
Conjuntos verticalmente simples



Quando a função a região de integração limitada horizontalmente por retas e verticalmente por quaisquer duas funções continuas.

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

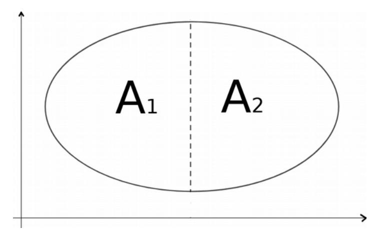
Conjuntos horizontalmente simples



Quando a região de integração está limitada verticalmente por retas e horizontalmente por duas funções continuas.

$$\int\int_S f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\int_{i(y)}^{j(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Propriedades

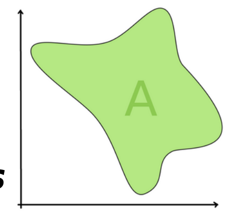


$f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

- Se $A=A_1\cup A_{1,}\,\mathrm{int}(A_1)\cap\mathrm{int}(A_2)=\emptyset$ e f integrável em A_1 e A_2 então é integrável em A e:
  $\int_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy$
- Se f,g integráveis em A e $c\in\mathbb{R}$:
  $\int\int_A (f+cg)(x,y)\,dx\,dy=\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy\ +\ c\int\int_A g(x,y)\,dx\,dy$
- Se $f(x,y)\geq g(x,y)$ então $\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy\geq\int\int_A g(x,y)\,dx\,dy$
- Se f integrável $|f|$ é integrável e $\left|\int\int_A f(x,y)\right|\leq\int\int_A |f(x,y)|$

Aplicações

Área de domínio plano



$\int\int_A 1\,dx\,dy$

Volume compreendido entre o gráfico de duas funções

$\int\int_A f(x,y)-g(x,y)\,dx\,dy$

Volume de sólido

$\int\int\int_S 1\,dx\,dy\,dz$

Massa de lamina fina

Entenda-se por lamina fina uma com espessura desprezável.

Sendo $\rho(x,y)$ a densidade, a massa calcula-se $M=\int\int_A \rho(x,y)\,dx\,dy$.

Massa de Sólido

Sendo $\rho(x,y,z)$ a densidade, a massa calcula-se $M=\int\int\int_S \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Centro de massa de lamina fina

Momento de massa em relação ao eixo x : $M_x=\int\int_A y\rho(x,y)\,dx\,dy$

Momento de massa em relação ao eixo y : $M_y=\int\int_A x\rho(x,y)\,dx\,dy$

Centro de massa: $C_M=\left(\frac{M_x}{M},\frac{M_y}{M}\right)$.

Centro de massa de um sólido

Momento de massa em relação ao plano YoZ : $M_x=\int\int\int_A x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Momento de massa em relação ao plano XoZ : $M_y=\int\int\int_A y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Momento de massa em relação ao plano XoY : $M_z=\int\int\int_A z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Centro de massa: $C_M=\left(\frac{M_x}{M},\frac{M_y}{M},\frac{M_z}{M}\right)$.

Momentos de inércia de uma lamina fina

Medem tendencial de resistência no movimento de rotação.

Para cada eixo são dados por:

$I_x = \int\int_A y^2 \rho(x,y)\,dx\,dy \qquad I_y = \int\int_A x^2 \rho(x,y)\,dx\,dy$

Momento de inércia de um sólido relativamente a um eixo

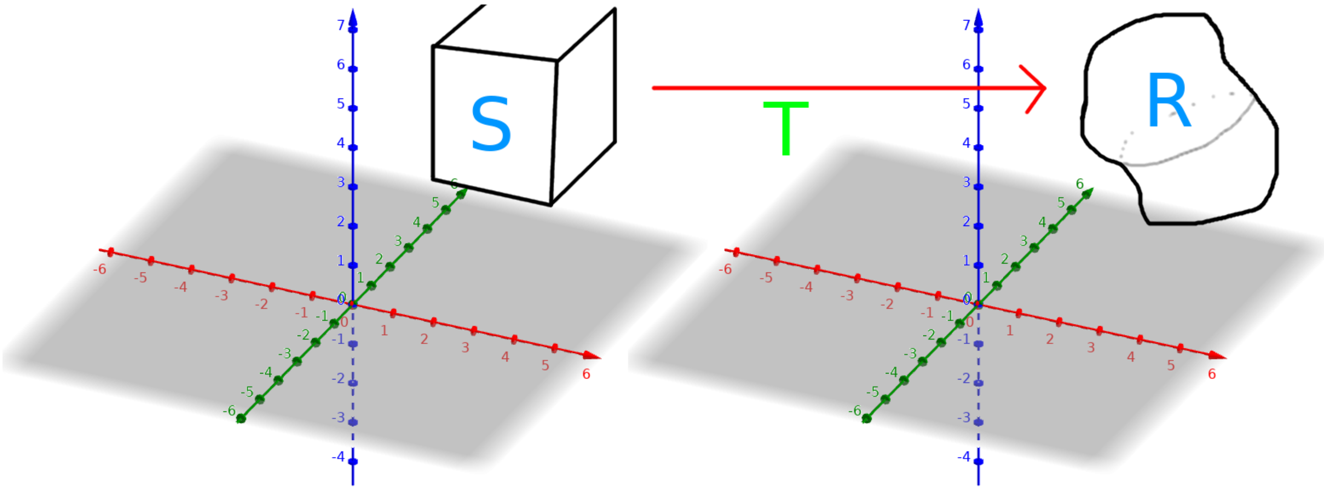
Sendo $\rho(x,y,z)$ a densidade do sólido e a distancia ao eixo Z : $d=\sqrt{x^2+y^2}$

$I = \int\int\int_S (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ é o momento de inércia ao eixo do Z .

[Continuar, aula 5/12]

Mudança de variáveis

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to R$ uma função continua e $T : S \to R$ uma função vetorial.



Sabendo que $T(S)=R$, se:

- $T \in C^1$
- T injetiva em S
- O Jacobiano de T não se anula no interior de S

Então:

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_S f(x(u,v),y(u,v)) \left| det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$$\int\int\int_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$\int\int\int_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left| det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

Idem para as restantes dimensões.

Extremos de integração

Quando uma variável é alterada é necessário que os extremos sejam ajustados ao novo domínio.

Para a mudança $x=\phi(t)$ ser feita, as constantes são a e b são recalculadas $a=\phi(\alpha)$, $b=\phi(\beta)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

Sistemas de coordenadas

Coordenadas polares

A mudança de variável a efetuar é:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \cos\theta=\dfrac{x}{\rho} & \cos\theta=\dfrac{x}{\rho} \\ \sin\theta=\dfrac{y}{\rho} & \sin\theta=\dfrac{y}{\rho} \end{matrix}$$

Note-se que: $x^2+y^2=\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=\rho^2$

A Jacobiana de uma transformação para polares é:

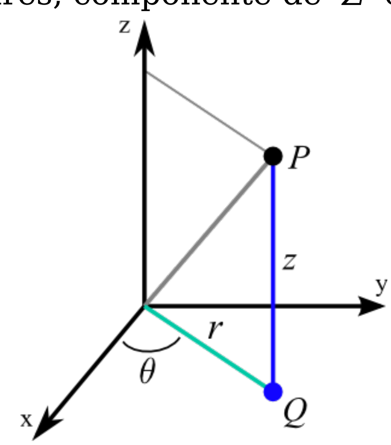
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$$

O seu determinante $\rho\cos^2\theta+\rho\sin^2\theta = \rho$.
Uma vez que ρ é sempre positivo, o Jacobiano é ρ.

Coordenadas cilíndricas

Similares às polares, mas com profundidade (dada em forma cartesiana).

Componente no plano XoY é dado em coordenadas polares, componente de Z é dada na forma cartesiana.



A mudança de variável a efetuar é:

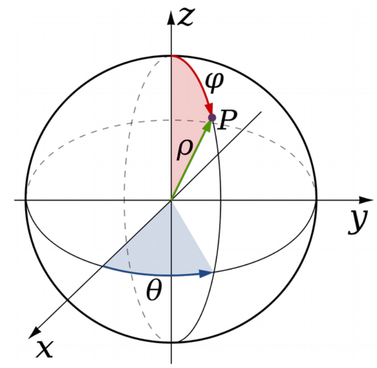
$$\begin{cases} x=r\cos\theta & -\infty<z<+\infty \\ y=r\sin\theta & \theta\in[0,2\pi[\\ z=z & r\geq 0 \end{cases}$$

A Jacobiana de uma transformação para cilíndricas é:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O seu determinante $r\cos^2\theta+r\sin^2\theta = r$.
Uma vez que r é sempre positivo, o Jacobiano é r .

Coordenadas esféricas



Similares às polares, mas com mais uma dimensão. Utilizadas principalmente para lidar com domínios esféricos.
<u>Evitar utilizar com domínios que não sejam literalmente uma esfera, ou parte de uma, em caso de duvida é cilíndricas que se quer</u>.

A mudança de variáveis a efetuar é:

$$\begin{cases} x=\rho\sin(\phi)\cos(\theta) & \phi \in [0,\pi[\\ y=\rho\sin(\phi)\sin(\theta) & \theta \in [0,2\pi[\\ z=\rho\cos(\phi) & \rho\geq 0 \end{cases}$$

A Jacobiana de uma transformação para esféricas é:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}=\begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{bmatrix}$$

O seu determinante $-\rho^2\sin\phi$.

Uma vez que ρ e $\sin(\phi)$ são sempre positivos, o Jacobiano é $\rho^2\sin\phi$.

Perdidos e .. perdidos só

Teorema

Sendo $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e a um ponto interior ao domínio.
Se f diferenciável em a, [...]

$$df(a)(h) = L_a(h) = \frac{\partial d}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial d}{\partial x_2}(a)h_2 + \cdots + \frac{\partial d}{\partial x_n}(a)h_n = \nabla f(a)^T h$$

Sendo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e a um ponto interior ao domínio.
f é diferenciável em a, só se para todo o $i \in \{1, \cdots, p\}$ $\quad f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Se f é diferenciável em a então as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existem para todo o $i \in \{1, \cdots, p\} \quad j \in \{1, \cdots, n\}$:

$$df(a)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = Jac_f(a) \times h = [\nabla f_1(a) \nabla f_2(a) \cdots \nabla f_p(a)]^T h$$

Sabe-se (por Taylor, ver acima) que uma função pode ser definida por:
$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^T \times h + h^T \times Hess\, f(a) \times h/2 + \|h\|^2 \epsilon(h)$.

Se um ponto a for estacionário, então $\nabla f(a) = 0$, estabelecendo a equivalência:

$f(a+h) - f(a) = h^T \times Hess\, f(a) \times h/2 + \|h\|^2 \epsilon(h)$

Quando h tende para 0, $\quad h^T \times Hess\, f(a) \times h > \|h\|^2 \epsilon(h)$ pelo que:

- $h^T \times Hess\, f(a) \times h \geq 0$ então $f(a)$ é mínimo relativo.
- $h^T \times Hess\, f(a) \times h \leq 0$ então $f(a)$ é máximo relativo.
- Se $h^T \times Hess\, f(a) \times h$ oscila de sinal, então $f(a)$ é ponto de sela.

Raciocinio extremos absolutos

Façam-se as seguintes mudanças de variável: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = r$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = s$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = t$

Então:

$P(h_{1,}h_2) = h^T Hess\, f(a) h = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \partial^2 f \frac{h_1^2}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 = r h_1^2 + 2 s h_1 h_2 + t h_2^2$

[P → ?? , alguma diferença nestes cálculos por não dividir por 1/2?]

Note-se que $hess\, f(a) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$ e portanto $rt - s^2 = det(hess\, f(a))$.

Se $r = t = 0$ e $s \neq 0$:

$P(h_{1.}h_2) = 2 s h_1 h_2$ não tem sinal fixo na vizinhança de a. a não é extremo.

Se $r \neq 0$ e supondo que $h_2 \neq 0$:

$$P(h_{1,}h_2) = h_2^2 \left(r \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 + 2 s \frac{h_1}{h_2} + t \right) \underbrace{=}_{\alpha = \frac{h_1}{h_2}} h_2^2 (r \alpha^2 + 2 s \alpha + t)$$

Pela formula resolvente: $r \alpha^2 + 2 s \alpha + t = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-2 s \pm \sqrt{4 s^2 - 4rt}}{2 r}$

Sabe-se que $4 s^2 - 4rt > 0 \Leftrightarrow s^2 - rt > 0$ então $P(h_{1,}h_2)$ oscila o sinal na vizinhança de a [porquê?], logo $f(a)$ não é extremo.

Quando $s^2 - rt < 0$: [porquê é que t não é considerado?]
Se $r > 0$ então $P(h_{1,}h_2) \geq 0$ logo $f(a)$ é mínimo relativo.
Se $r < 0$ então $P(h_{1,}h_2) \leq 0$ logo $f(a)$ é máximo relativo.
Se $h_2 = 0$ então $P(h_{1,}0) = r h_1^2$ [portanto r dita se é mínimo ou máximo ou mínimo, tal como nos casos acima, exceto quando $h_1 = 0$ (?)]

[Quando $t \neq 0$ e supondo que $h_1 \neq 0$:
Se $t > 0$ então $P(h_{1,}h_2) \geq 0$ logo $f(a)$ é mínimo relativo.
Se $t < 0$ então $P(h_{1,}h_2) \leq 0$ logo $f(a)$ é máximo relativo.
Se $h_1 = 0$ então $P(0, h_2) = t h_2^2$ [portanto t dita se é mínimo ou máximo ou mínimo, tal como nos casos acima, exceto quando $h_2 = 0$ (?)]]