Análise Matemática II E Cláudio Pereira (O verdadeiro, não o clone A.K.A. Cluedo)

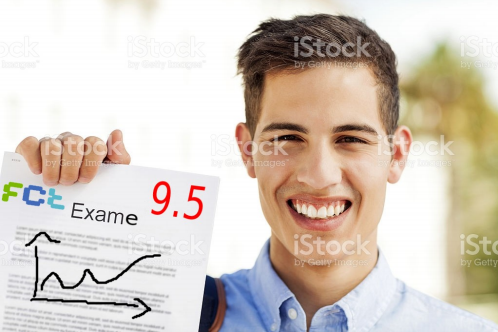
Índice

Equações Diferenciais.............................................................................................5 Soluções de equações diferenciais....................................................................6 Problemas de valor inicial.................................................................................7 Equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª ordem....................................8

Resolução pelo método do fator integrante.................................................8 Resolução com variáveis separadas.............................................................8 Modelos de crescimento....................................................................................9 Modelo de crescimento exponencial............................................................9 Modelo de temperatura de newton..............................................................9 Campos de direções...................................................................................10 Aproximações Lineares....................................................................................11 Método de Euler.........................................................................................11 Topologia em Rn.....................................................................................................12 Conjuntos numéricos multidimensionais.........................................................12 Vizinhanças......................................................................................................13 Noções topológicas elementares.....................................................................13 Geometria Analítica...............................................................................................14 Linhas cónicas.................................................................................................14 Elipses........................................................................................................14 Hipérboles..................................................................................................14 Parábolas....................................................................................................15 Superfícies quadráticas...................................................................................16 Degeneradas..............................................................................................16 Elipsoides...................................................................................................16 Hiperboloide de uma folha.........................................................................16 Hiperboloide de duas folhas......................................................................17 Cone elíptico..............................................................................................17 Paraboloide elíptico...................................................................................18 Paraboloide hiperbólico.............................................................................18 Limites em Rn........................................................................................................19 Provar por defnição (Cauchy):........................................................................19 Desprovar por defnição(Heine):.....................................................................19 Teorema das funções enquadradas.................................................................19 Limites iterados...............................................................................................20 Resolução com coordenadas polares...............................................................20 Remoção de descontinuidades........................................................................21 Calculo Diferencial................................................................................................22 Derivadas parciais...........................................................................................22 Derivadas de ordens superiores a um.......................................................22 Notação alternativa............................................................................22 Teorema de Schwarz..................................................................................23 Diferenciabilidade............................................................................................24 Vetor Gradiente...............................................................................................25 Derivada Direcional...................................................................................25 Jacobiana.........................................................................................................26 Propriedades......................................................................................26

Jacobiano............................................................................................26 Aproximações Polinomiais (Taylor)..................................................................27 Funções de uma variável...........................................................................27 Funções de múltiplas variáveis..................................................................27 Matriz Hessiana.........................................................................................27 Aproximação quadrática (ordem 2)...........................................................27 Estudo de extremos.........................................................................................28 Pontos estacionários..................................................................................28 Extremos locais..........................................................................................28 Extremos absolutos....................................................................................29 Propriedades do Gradiente........................................................................29 Maximização por Lagrange.............................................................................30 Lagrangiana.......................................................................................30 Multiplicador de Lagrange.................................................................30 Teorema da Função Implícita..........................................................................31 Teorema da Função Inversa............................................................................31 Integração Múltipla...............................................................................................32 Particionamento...............................................................................................32 Teorema de Fubini...........................................................................................33 Método de Cavalier para calculo de volumes..................................................33 Conjuntos de integração..................................................................................34 Conjuntos verticalmente simples...............................................................34 Conjuntos horizontalmente simples...........................................................34 Propriedades..............................................................................................34 Aplicações........................................................................................................35 Área de domínio plano........................................................................35 Volume compreendido entre o gráfco de duas funções.....................35 Volume de sólido.................................................................................35 Massa de lamina fna..........................................................................35 Massa de Sólido..................................................................................35 Centro de massa de lamina fna.........................................................35 Centro de massa de um sólido...........................................................35 Momentos de inércia de uma lamina fna..........................................36 Momento de inércia de um sólido relativamente a um eixo..............36 Mudança de variáveis......................................................................................37 Extremos de integração.............................................................................37 Sistemas de coordenadas................................................................................38 Coordenadas polares.................................................................................38 Coordenadas cilíndricas.............................................................................38 Coordenadas esféricas...............................................................................39 Perdidos e .. perdidos só.......................................................................................40

Deu de caras com isto?

Aceitam-se donativos em coisas como café!

**Equações Diferenciais**

Uma ***equação diferencial*** é uma equação em que incógnita é uma função *y*=*y*(*x*) e que envolve uma ou mais derivadas desta função.

Exemplos

2*x*+1=0→ Não é equação diferencial

2 *y*2=2 *x*→ Não é equação diferencial

2 *y’*+ *y*=2 *x*→ É equação diferencial

*y ’*=2 *x*→ É equação diferencial

Todas as seguintes são equações diferenciais:

*dx* =*e*2*x*⇔ *y*(*x*)=∫*e*2*xdx*=*e*2*x*

•*dy* •*dy*

2+*Cdy*

*dx* =*f* (*x*)⇒ *y*(*x*)=∫ *f* (*x*)*dx*

*dx* =3 *y* ⇔ *y '*=3 *y* ⇔ *dy*=3 *y dx*

◦ **Nota**: Apesar de equivalentes, o ultimo formato não é desejável

*'*

• [3[ *y*(*x*)]2

=32×*y*(*x*)

2 ]

• Segunda lei de Newton:

*x*(*t*)⇒Posição de particula no instante *t dt* )=*md*2*x*

*f* (*t , x*(*t* )*,dy*

Terminologia

*dt*2

Uma equação diferencial diz-se ***ordinária*** quando a função incógnita defne uma única variável *y*=*y*(*x*)

**Exemplo**: *y*+ *y’*=0 é ordinária mas *yy ’*+*zz ’*=0 não é ordinária.

A ***ordem*** de uma equação diferencial é dada pelo maior grau das derivadas que fguram na mesma.

*dx*

*dy* =3 *y* ⇒ equação de primeira ordem

*y ''*+*y*=0 ⇒ equação de segunda ordem

**Soluções de equações diferenciais**

Uma ***solução*** de uma equação diferencial é uma função que satisfaz a equação diferencial num curto intervalo aberto *I*

Pode ser dada na forma ***explicita***: *ex*+ *y*=3⇔ *y*=3−*ex*

ou na forma ***implícita***: log(*x*+4)+cos(*xy*)=4

sendo as mesmas diferenciadas pela isolabilidade do *y*

Uma solução de uma eq. diferencial pode ser categorizada das seguintes formas:

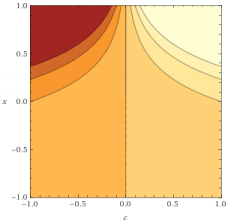
• **Solução geral**: Toda a expressão que envolve constantes e que engloba todas as soluções.

Nota: A solução geral de uma equação diferencial de ordem *m* apresenta *m* constantes

• **Solução particular**: Não é defnida à custa de constantes arbitrarias. • **Solução singular**: Não resulta da solução geral por particularização das constantes.

• **Solução estável (ou em equilíbrio)**: Solução constante da equação diferencial. *y*(*x*)=*k* (Dica: *y '*(*x*)=0 , e por )

As soluções podem ser representadas com uma **curva integral,** um gráfco que representa as possibilidades para os diversos valores de constante. A equação *y*=*ce*3 *x, x,c*∈ℝ seria representada da seguinte forma:

*C*=2 *y*=2*e*3*x* 

*C*=1 *y*=*e*3 *x*

*C*=0 *y*=0

*C*=−1 *y*=−*e*3*x*

*C*=−2 *y*=−2*e*3*x*

Exemplos de soluções

1. *dy*

*dx* =3 *y y*=*e*3*x, x*∈ℝ*dy*

*dx* =3*e*3 *x*=3 *y* é solução particular

2. *dy*

*dx* =3 *y y*=*ce*3*x, x ,c*∈ℝ*dy*

*dx* =*c*3*e*3*x*=3 *y* é solução geral

**Problemas de valor inicial**

Um problema de valor inicial consiste numa equação diferencial associada a uma **condição inicial**, (a qual vai permitir a descoberta de uma solução particular do problema).

Por exemplo a equação *dy*

*dx* =3 *y* dada uma condição inicial *y*(0)=2 seria

resolvida *y*=*ce*3 *x* ⇒ 2=*ce*3×0⇒ *c*=2 .

Conclui-se que *y*=2*e*3*x*é a solução do problema de valor inicial

**Equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª ordem** Uma equação diferencial é dita linear se tiver o formato *y '*+*p*(*x*) *y*=*q*(*x*)

**Resolução pelo método do fator integrante**

Sendo *P*( *X*)=∫*p*(*x*)*dx*

É obtido um **fator integrante** μ(*x*)=*eP*(*x*)=*e*∫*p*(*x*) *dx* , o qual deve de ser utilizado para multiplicar todos os membros, tornando possível a seguinte observação: (*eP*(*x*)*y*)*'* = *y 'eP*(*x*)+*p*(*x*)*y eP*(*x*) = *eP*(*x*)( *y '*+*p*(*x*) *y*) = *eP*(*x* )*q*(*x*)

Fica estabelecida a igualdade (*eP*(*x*)*y*)*'* = *eP* (*x*)*q*(*x*)

Sendo o processo de dedução de *y* o seguinte:

*eP*(*x*)*y*=∫*eP* (*x*)*q*(*x*)*dx*+*c* ⇒ *y*(*x*)=*e*−*P*(*x*)∫ *eP*(*x*)*q*(*x*)*dx*+*c*

Caso particular (q(x) = 0)

Quando *q*(*x*)=0 , a dedução pode ser feita:

*y ’*+*p*(*x*) *y*=0 ⇔ *y ’*=−*p*(*x*) *y* ⇔⏟*y*≠0

⇔log(|*y*|)=−∫*p*(*x*)*dx*+*c c*∈ℝ ⇔|*y*|=*e*−∫*p*(*x*)*dx* +*c*

⇔|*y*|=*ke*−∫ *p*(*x*)*dx k*>0

⇔*y*=*ke*−∫*p*(*x*)*dx k*∈ℝ∖{0}

*y ’*

*y*=−*p*(*x*)

**Resolução com variáveis separadas**

Aplicável quando é possível isolar as diferentes variáveis em parcelas.

*h*( *y*)*dy*

*dx* =*g*(*x*) ⇔*dy*

*dx* =*g*(*x*)1

*h*(*y*)

Note-se que *g*(*x*) só depende de *x h*( *y*) só depende de *y*

Se *h* e *g* são continuas num mesmo intervalo, com *H* e *G* as suas primitivas ∫*h*( *y*)*dy*

*dx dx*=∫*g*(*x*)*dx*

*H*( *y*)+*c*2=*G*(*x*)+*c*1 *H*( *y*)=*G*(*x*)+*c*3, *c*3∈ℝ

← É a solução geral da equação dada na forma implícita Note-se que o funcionamento desta lógica depende de uma mudança de variável, dai a obrigatoriedade de as variáveis serem separadas.

**Modelos de crescimento**

**Modelo de crescimento exponencial**

Dado pela equação *y '*=*ky*

*k*>0 → Crescimento

*k*<0 → Decrescimento

*y '*=*ky* ⇔*y 'y*=*k* ⇔ log(|*y*|)=*kx*+*c* ⇔ |*y*|=*c*1 *ekx*⇔ *y*=*c*2*ekx*

*C*∈ℝ *, C*1∈ℝ∖{0}*, C*2∈ℝ+

Assim sendo, *y*=*c*2 *ekx* é a solução geral deste modelo de crescimento

Este modelo serve para modelar quantias que variam com o tempo em função delas mesmas, tais como uma população ou o decaimento de isótopos radioativos.

**Modelo de temperatura de newton**

Dado pela equação *y '*=*k*( *y*−*a*) , em que *k* é a taxa de variação (condutividade térmica), e *a* a temperatura ambiente.

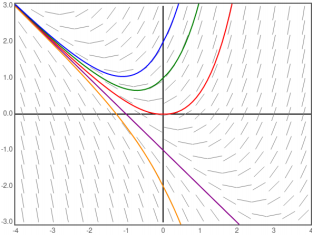
Pode ser utilizado para modelar a temperatura de um meio a dado instante, (assumindo que não há interferência externa, leia-se, *a* constante).

*y*(*t*) → Temperatura do meio no instante *t* .

**Campos de direções**

Um campo de direções é uma forma de representação de equações diferenciais. Para uma malha de pontos com um intervalo defnido, é calculada a equação que a satisfaz, sendo que o declive da derivada é colocado em cada um dos pontos.

Seguindo um caminho tem-se uma solução particular da equação diferencial.

Caminhos conseguidos a 

partir dos pontos iniciais:

*y*=−2 (Azul)

(0,−1) (Verde)

(0,0) (Vermelho)

(0,1) (Roxo)

(0,2) (Laranja)

**Aproximações Lineares**

**Método de Euler**

Utilizado quando se quer aproximar *yn*(que corresponde a uma posição *xn*) partindo de um valor inicial. O valor inicial sendo representado (*x*0, *y*0) .

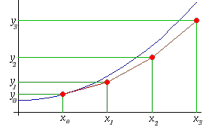
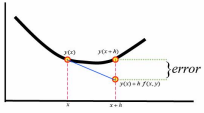
Divide-se a distancia de *x*0(valor inicial) até *xn* em *k* segmentos idênticos. Estabelece-se um valor *h* (comprimento de passo) que é igual a |*xn– x*0|

*k*, ou seja,

o comprimento de cada um dos segmentos.

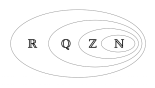
Admite-se que (*x*1*, y*0+*h f* (*x*0, *y*0)) como solução intermédia.

Repete-se o processo até alcançar *xn*, cuja aproximação será (*xn, yn*−1+*h f* (*xn*−1*, yn*−1)) .

**Nota**: Quanto mais pequeno for o comprimento de passo e maior o numero de segmentos, melhor vai ser a aproximação.

**Topologia em Rn**

**Conjuntos numéricos multidimensionais**

Existem infnitos conjuntos numéricos dentro dos 

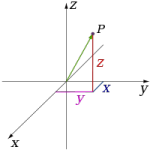
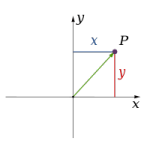
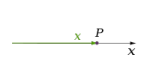
previamente conhecidos.

A elevação de um conjunto a numero natural confere

lhe dimensões, pelo que ℝ pode ser lido ℝ1, mas é

possível e desejável a criação de conjuntos de varias

dimensões.

ℝ1tem uma variável real, as solução são representadas num plano. ℝ2tem duas variáveis reais, as solução são representadas num espaço. ℝ3tem três variáveis reais, as soluções são representadas num hiperespaço.

**Vizinhanças**

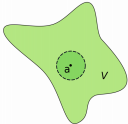
Uma vizinhança de centro *a* e raio ϵ (*a*∈ℝ∧ϵ>0) é representada: *V* ϵ(*a*) = {*x*∈ℝ*n*: *d*(*x ,a*)<ϵ} = {*x*∈ℝ*n*:‖*x*−*a*‖<ϵ}

Em que ‖*x*−*a*‖ é a norma euclidiana, sendo a mesma calculada: ‖*y*‖=‖( *y*1,⋯*, yn*)‖=√ *y*12+⋯+ *yn*2

Em ℝ :

‖*x*−*a*‖=√(*x*1 *–a*1)2=|*x*1−*a*1|<ϵ ⇔ *a*1−ϵ < *x*1 < *a*1+ϵ



Em ℝ2: 

‖*x*−*a*‖ = ‖(*x*1,*x*2)−(*a*1,*a*2)‖ = ‖(*x*1−*a*1, *x*2−*a*2)‖ =

√(*x*1−*a*1)2+(*x*2*–a*2)2<ϵ ⇔ (*x*1−*a*1)2(*x*2−*a*2)2<ϵ →

Em ℝ3:

‖*x*−*a*‖ = √(*x*1−*a*1)2+(*x*2−*a*2)2+(*x*3−*a*3)2< ϵ

**Nota**: Em ℝ3 a vizinhança é uma esfera

**Noções topológicas elementares**

Seja *A*⊆ℝ*n* e *a*∈ℝ*n*

Se *a* for ponto **interior** de *A* :

*a*∈int ( *A*) ⇒ ∃ϵ >0*, V* ϵ(*a*)⊆*A*

Se *a* for ponto **exterior** de *A* :

*a*∈ext ( *A*) ⇒ ∃ϵ >0*, V* ϵ(*a*)⊆ℝ*n*∖ *A*

Se *a* for ponto **fronteiro** de *A* :

*a*∈fr ( *A*) ⇒ ∀ϵ >0*, V*ϵ(*a*)∩*A*≠0 ∧ *V* ϵ(*a*)∩ℝ*n*∖ *A*≠0

Seja *A*⊆ℝ*n*, chama-se **aderente** (ou fecho) de A a ¯*A*=int(*a*)∪*fr* ( *A*) Seja *A*⊆ℝ*n*

• Se *A*=int(*a*) , *A* diz-se conjunto **aberto**.

• Se *A*=*A* , *A* diz-se conjunto **fechado**

**Geometria Analítica**

**Linhas cónicas**

**Linhas cónicas** são representáveis num gráfco bidimensional, por base numa equação de 2º grau em *x* e *y* .

Uma linha cónica diz-se **degenerada** quando é um único ponto, ou uma reta.

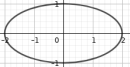
**Elipses**

São representadas pela equação:

*A*2+*y*2

*x*2

*B*2 =1 Sendo *A* o raio da elipse em *x* , *B* o raio em *y* .

*A*+*B*>0 , caso contrario a equação é de uma hipérbole. 

*A=4, B=1*

**Hipérboles**

Similares às elipses, mas *A*×*B*<0 .

*A*>0 *B*<0 

*A*<0 *B*>0 

Para uma hipérbole centrada na origem:

• O eixo positivo é o que detém os extremos das parábolas. • O eixo negativo não faz parte do contradomínio.

A constante positiva defne a disttncia entre os extremos das parábolas.

**Parábolas**

São representadas por uma equação em que uma das variáveis é do primeiro grau e a outra de segundo.

*Byk*1=*Ax k*2 ( *k*1⊗*k*2: Primeiro grau; *k*1⊗*k*2: Segundo grau)

Se *x*2 e *A*>0 :

Parábola desenvolve para *y*

Se *x*2 e *A*<0 :

Parábola desenvolve para −*y*

**

Se *y*2 e *B*>0 :

Parábola desenvolve para *x*

Se *y*2 e *B*<0 :

Parábola desenvolve para −*x*

**

**Superfícies quadráticas**

Uma superfície quadrática é representada pela equação: *Ax*2+*By*2+*Cz*2+ *Dxy*+*Exz*+*Fyz*+*Gx*+*Hy*+*Iz*+ *J* =0

**Degeneradas**

• Sem pontos: *x*2+ *y*2+ *z*2+1=0

• Um ponto: *x*2+2 *y*2+3 *z*2=0⇔(*x , y ,z*)=(0,0,0) • Reta: *x*2+ *y*2=0 (eixo *zz* )

• Plano: *z*2=0⇔*z*=0 (plano *XoY* )

• Dois planos: *x*2−*y*2=0⇔(*x*−*y*=0)∨(*x*+ *y*=0)

**Elipsoides**

*a*2+*y*2

*x*2

*b*2+*z*2

*c*2 =1

• Centrado na origem 

• Interseção com os eixos em (±*a ,*0,0)(0*,*±*b ,*0)(0,0 *,*±*c*) • Secções paralelas aos planos são sempre elipses • Se 2 semi-eixos iguais → Elipsoide de revolução • Se 3 semi-eixos iguais → Esfera

**Hiperboloide de uma folha**

*a*2+*y*2

*x*2

*b*2 −*z*2

*c*2 =1

• Centrado na origem 

• Interseção com os eixos em (±*a ,*0,0)(0*,*±*b ,*0) • Secções paralelas a *XY* : Elipses • Secções paralelas a *XZ* : Hipérboles • Secções paralelas a *YZ* : Hipérboles

**Hiperboloide de duas folhas** *a*2+*y*2

*x*2

*b*2 −*z*2

*c*2 =−1

• Centrado na origem 

• Interseção com os eixos em (0,0*,*±*c*) • Secções paralelas a *XY* → Elipses • Secções paralelas a *XZ* → Hipérboles • Secções paralelas a *YZ* → Hipérboles

**Cone elíptico**

*a*2+*y*2

*x*2

*b*2 −*z*2

*c*2 =0

• Intersecta os eixos em (0,0,0) 

• Secções paralelas a *XY* :

◦ Caso *z*=0 → Ponto (0,0,0)

◦ Caso contrario → Elipses

• Secções paralelas a *XZ* :

◦ Caso *y*=0 → Duas retas concorrentes ◦ Caso contrario → Hipérboles

• Secções paralelas a *YZ* :

◦ Caso *x*=0 → Duas retas concorrentes ◦ Caso contrario → Hipérboles

• Se *a*=*b* → Cone de revolução

**Paraboloide elíptico** *a*2+*y*2

*x*2

*b*2 =*zc*

• Secções paralelas a *XY* → Elipses • Secções paralelas a *XZ* → Parábolas • Secções paralelas a *YZ* → Parábolas • (0,0,0) → Vértice 

• *a*=*b* → Paraboloide de revolução

**Paraboloide hiperbólico**

*a*2 −*y*2

*x*2

*b*2 =*zc*

• Secções paralelas a *XY* : 

◦ Caso *z*=0 → Linhas concorrentes na

origem

◦ Caso contrario → Hipérboles

• Secções paralelas a *XZ* → Parábolas • Secções paralelas a *YZ* → Parábolas • (0,0,0) → Ponto de sela ou minimax da superfície

**Limites em Rn**

Um limite em ℝ2está na forma lim (*x , y*)→(*a*1,*a*2)

*f* (*x , y*) .

Em ℝ2+os limites tem de ser resolvidos por defnição ou por exaustão de possibilidades, sendo que as possibilidades de aproximação são infnitas, contrariamente aos limites em ℝ que só podem ser aproximados lateralmente.

**Provar por defnição Cauchy):**

∀δ>0,∃ϵ>0,*x*∈*D*∧||*x*−*a*||<ϵ⇒||*f* (*x*)−*b*||<δ

Tal como em ℝ , existe um limite se para todos os valores de δ existir um ϵ que majore a distancia ao ponto a calcular limite, em ℝ*n* o mesmo se aplica, sendo essa distancia a norma euclidiana.

Para um limite ser provado por defnição de Cauchy, tem que ser provado em como tal ϵ existe, e qual a sua relação a δ .

**Desprovar por defnição Heine):**

Tendo um limite lim (*x , y*)→(*a*1,*a*2)

*f* (*x , y*) , com *a*∈*Df*, o limite é *b* se todas as

sucessões possíveis que convergem para *a* fzerem *f* convergir para *b* .

Esta defnição é útil caso se pretenda provar a não-existência de limite, criando sucessões que causem com que o limite dê valores diferentes.

**Nota**: Caso o domínio de *f* tenha assimptotas que sejam vizinhas a *a* , as sucessões que forem próximas às assimptotas tem tendência a ter resultados diferentes, no caso de não haver um limite.

**Exemplo**: 1/*n* é uma sucessão próxima à bissetriz, se a bissetriz tender para um valor diferente, seguir essa sucessão desprovaria o limite.

**Teorema das funções enquadradas**

Quando se consegue minorar e majorar uma função por outras duas, e ambas essas funções tendem para um ponto, então a função intermédia, garantidamente também tende para esse ponto.

**Nota**: A majoração |*x*|≤√*x*2+ *y*2 frequentemente resolve problemas. É pertinente decora-la.

**Limites iterados**

Possíveis soluções de um limite em ℝ2podem ser encontradas iterando as variáveis da seguinte forma:

lim

(*x , y*)→(*a*1,*a*2)

*f* (*x , y*) = lim *x*→*a*1

lim *y* →*a*2

*f* (*x, y*) = lim *y*→ *a*2

lim *x*→*a*1

*f* (*x, y*)

Os **limites iterados não garantem a existência de limite**. Note-se que a seguinte função tem o mesmo limite quando calculado com qualquer uma das iterações, ainda que não exista limite:

(*xy*) 

(*x*2+ *y*2)

**Resolução com coordenadas polares**

A utilização de coordenadas polares garante a exaustão de possibilidades para um limite em ℝ2 uma vez que basta que uma única variável θ varie, e como tal a tendência da mesma para 0 revela a existência de limite.

A mudança de base é efetuada

*x*=ρ cosθ , *y*=ρsinθ ou √*x*2+*y*2=ρ2

E as restrições a aplicar são:

θ ∈[0, π2[ e ρ>0

O limite resultante tem que fcar na forma:

*g*(ρ) , sendo que *g*(ρ) contem θ , mas o mesmo não é uma variável, mas sim a

lim

ρ→0

constante referente a todos os θ possíveis.

**Remoção de descontinuidades**

[Funciona para qualquer ℝ*n*, apenas alterando a defnição de vizinhança] Sendo *f* uma função, seja *a* um ponto do seu domínio.

Se lim (*x*1,⋯*,xn*)→*a*

*f* (*x*1,⋯*,xn*) existir, então *f* é continua na vizinhança a *a* .

No entanto se *a* for diferente do resultado do limite, (como ilustrado quando *a*=*x*1), é dito que *f* tem uma descontinuidade removível em *x*1.

Para remover a descontinuidade é 

declarada uma nova função baseada

em *f* , *f '* .

*f '*(*x*)={*f* (*x*)*,x*≠*x*1

*yn,x*=*x*1

Quando o limite não existe, não é possível remover a descontinuidade (ver na fgura *a*=*x*2), não havendo nenhum ponto capaz de fazer vizinhança simultaneamente a *f* (*a*-) e *f* (*a*+) .

**Calculo Diferencial**

**Derivadas parciais**

No calculo multi-variável, uma derivação total não pode ser aplicada. Cada variável tem que ser derivada à vez.

∂ *f*

∂ *x* lê-se, a “derivada parcial de *f* em relação à variável *x* ”. Variáveis que não explicitamente derivadas são tratadas como constantes. **Exemplo**:

*f* (*x, y*)=sin(*xy*)

∂ *f*

∂ *x*=cos(*xy*) *y*∂ *f*

∂ *y*=cos(*xy*) *x*

**Definição**:

Sendo *f* :ℝ*n*→ℝ *, A*⊆ℝ*n* aberto.

*f* diz-se de classe *Cp*( *A*) se *f* for parcialmente derivável até à ordem *p* obtendo funções continuas como resultado.

Logo *f* ∈*C*∞( *A*)⇔ *f* ∈*Cp*( *A*)*,* ∀*p*∈ℕ (classe infnita serve todas as classes) **Derivadas de ordens superiores a um**

∂2*f*

∂ *y* )∂2*f*

∂ *x* )∂2*f*

∂ *x* ∂ *y*= ∂∂ *x* (∂ *f*

∂4*f*

∂ *x*1 ∂ *x*22∂ *x*3=∂ ∂ *x*1 (∂

∂ *y* ∂ *x*= ∂∂ *y* (∂ *f* ∂ *x*2 (∂ *f*

∂ *x*2 = ∂∂ *x* (∂ *f* ∂ *x* )

∂ *x*2 (∂

∂ *x*3 )))

**Nota**: Caso as derivadas intermédias não sejam continuas, a ordem de derivação importa para o resultado (ver Teorema de Schwarz).

***Notação alternativa***

Uma forma compacta de representar derivadas parciais é a seguinte, e será utilizada ao longo do resumo:

∂2*f*

∂ *y* ∂ *x*(*a*)=*fxy* (*a*)

Note-se que não foi utilizada nas aulas.

**Teorema de Schwarz**

Se *f* ∈*Cp*( *A*) , com *p*≤ numero derivações a efetuar, a ordem de derivação pode ser trocada.

**Exemplo**:

Se *f* :ℝ*n*→ℝ ∧ *f* ∈*C*2(ℝ*n*) então:

∂2*f*

∂ *x*1 (∂ *f*

∂ *x*2 (∂ *f*

∂ *x*1 ∂ *x*2= ∂

∂ *x*2 )= ∂

∂ *x*1 )

**Diferenciabilidade**

Em ℝ : *f* é diferenciável em *x*0 ⇔ *f ’*(*x*0) existe e é fnita Em ℝ*n*: *f* é diferenciável em *x*0 ⇐/⇒ as derivadas parciais existem. Exemplo/Prova: [fazer a partir da pg. 28]

Para *f* : *D*⊆ℝ2→ℝ e *a* um ponto interior a *D* :

*f* é diferenciável em *a* se:

• ∃∂ *f*

∂ *x*(*a*)*,*∂ *f*

∂ *y*(*a*)

*f* (*a*+*h*)−*f* (*a*)−∂ *f*

∂ *x*(*a*)*h*1−−∂ *f*

• lim

(*h*1,*h*2)→(0,0)

[ver prática 30/10]

∂ *x*(*a*)*h*2

√*h*12+*h*22

O mesmo é verdade em ℝ3+ com os devidos ajustes na formula. Uma função é diferenciável se as derivadas de uma função forem continuas. Se *f ,g*: *D*⊆ℝ*n*→ℝ*p* diferenciáveis em *a* (ponto interior):

• *f* +*g* é diferenciável em *a* e

*d*(*f* +*g*)(*a*)=*df* (*a*)+*dg*(*a*) , *d*(*f* −*g*)(*a*)=*df* (*a*)*–dg*(*a*) .

• *f*⋅*g* é diferenciável em *a*

*d*(*f*⋅*g*)(*a*)=*f* (*a*)*dg*(*a*)+*g*(*a*)*df* (*a*)

• Se *g*(*a*)≠0 então *f* /*g* é diferenciável em *a* e

*d*(*fg* )(*a*)=*g*(*a*)*df* (*a*)*– f* (*a*)*dg*(*a*)

[*g*(*a*)]2

**Vetor Gradiente**

O gradiente é o vetor das derivadas parciais. Representa-se ∇ , e para uma função *f* : *D f* ∈ℝ*n* avaliada no ponto *a* é:

*T*

∇ *f* (*a*) =[∂ *f*

∂ *x*1(*a*) ⋯∂ *f*

∂ *xn*(*a*)]

O sentido do vetor gradiente indica a maior subida instanttnea.

Logo o simétrico do gradiente é a direção com a maior descida instanttnea.

**Derivada Direcional**

*****Gradiente dos diversos pontos*

Uma derivada direcional é a taxa de variação num dado sentido da função.

A derivada de *f* , (função em ℝ*n*) no ponto *a* segundo ⃗*u* é dada por: *f* (*a*+*t u*⃗)−*f* (*a*)

lim *t*→0

*t* e representa-se *f* ⃗*u*'(*a*) .

Se ‖*u*⃗‖=1 então a derivada é dita uma derivada direcional na direção de ⃗*u* .

Se *f* for diferenciável em *a* (um ponto interior ao domínio), então *f* admite derivada em *a* segundo qualquer vetor e:

*f* ⃗*u*'(*a*) = ∇ *fT*(*a*)⃗*u* =∂ *f*

∂ *x*1(*a*)*u*1+⋯+∂ *f*

∂ *xn*(*a*)*un*

**Nota**: Uma função pode ter derivada num qualquer vetor num dado ponto e ainda assim não ser diferenciável.

**Jacobiana**

A Jacobiana é a matriz das derivadas parciais.

Sendo *f* :ℝ*n*→ℝ*p* e *a* um ponto interior ao domínio. Sendo *f* diferenciável em *a* então as matriz Jacobiana é defnida:

∂ *f* 1

∂ *x*1(*a*) ⋯∂ *f* 1

∂ *xn*(*a*)

*Jacf*(*a*) =[

∂ *xn*(*a*)]= [∇ *f* 1(*a*)∇ *f* 2(*a*)⋯∇ *f p*(*a*)]*T*

⋮ ⋮

∂ *f p*

∂ *x*1(*a*) ⋯∂ *f p*

***Propriedades***

Com duas funções *g*:ℝ*n*→ℝ*p*, e *f* :ℝ*p*→ℝ*t*.

Se *g* diferenciável em *a* e *f* diferenciável em *g*(*a*) , então *f* ∘*g* é diferenciável em *a* e *Jac f* ∘*g*(*a*)= *Jacf*(*g*(*a*))× *Jacg*(*a*) ; *d*(*f* ∘*g*)(*a*)=*df* (*g*(*a*))∘*dg*(*a*)

[Teórica 26/10, acabar] [*f* (*g*(*x*))]*’*=*f ’*(*g*(*x*))*g’*(*x*) *Jac f* ∘*g*(*x*)= *Jacf*(*g*(*x*))× *Jacg x*

ℝ2

(*x, y*)

→θℝ2 (*u,v*)

→*f*ℝ*z Jacg*(*x , y*)= *Jacf*(*u*(*x , y*)*,v*(*x , y*))× *Jac*θ(*x , y*)

∂*u*

∂ *x*(*x , y*)∂*u*

-------- *g*=*f* ∘θ=*f* (θ(*x , y*)) *Jac*θ(*x, y*)=[ ∂ *v*

∂ *y*(*x , y*)

∂ *y*(*x , y*)]--------------

∂ *x*(*x , y*)∂*v*

*Jac f*(*u*(*x , y*)*,v*(*x , y*))=[∂ *f*

∂*u*(*u*(*x, y*))*,*∂ *f*

∂ *v*(*v*(*x, y*))]--------------------

*Jacg*(*x , y*)=[∂ *f*

∂*u*

∂*v*

∂ *y* ]---------------------------

∂*u*

***Jacobiano***

∂ *x*+∂ *f* ∂ *v*

∂*v* ∂ *x*

∂ *f* ∂*u*

∂*u*

∂ *y*+∂ *f* ∂ *v*

O Jacobiano é o modulo do determinante da matriz Jacobiana. Para uma função *T*(*u ,v*)=(*x*(*u ,v*)*, y*(*u,v*)) o seu Jacobiano é:

∂ *x*

|*det JacT*(*u ,v*)|=|*det* ∂(*x , y*)

∂ *x*

∂ *v* ]|=∂ *x*

∂*u*×∂ *y*

∂ *v*−∂ *x*

∂*u*

∂(*u ,v*)|=|*det* [

∂ *y*

∂*u*

∂ *v* ∂ *y*

∂ *v*×∂ *y* ∂*u*

**Aproximações Polinomiais Taylor)**

**Funções de uma variável**

Em *I* intervalo aberto, *f* ∈*Cn*(*I*)*,a*∈*I*

*f* (*a*+*h*)=⏟*f* (*a*) ponto

+ *h*⏟*f ’*(*a*) aprox. linear

+*h*2*f ’’*(*a*)

⏟2*!*

aprox. quadrática

+*h*3*f ’’’*(*a*)

~~⏟~~3*!* aprox. cubica

*n!*+*hn*⏟ϵ(*h*)

+⋯+*hnf*(*n*)(*a*)

erro

A aproximação ao ponto *a*tem de convergir à função. (lim *h*→0

**Funções de múltiplas variáveis**

**Notação**: *D ji* =∂*i*

∂ *x j*.

Em *I* intervalo aberto, *f* ∈*Cn*(*I*)*,a*∈*I* .

ϵ(*h*)=0)

*f* (*a*+*h*)= ∑ *i*1+*i*2+⋯+*in*≤*n*

(*D*1*i*1 *D*2*i*2⋯*Dninf* )(*a*)

*i*1*!i*1*!*⋯*in!h*1*i*1*h*2*i*2⋯*hnin*+‖*h*‖*n*×ϵ(*h*) . Novamente lim *h*→0

ϵ(*h*)=0

**Matriz Hessiana**

Matriz das segundas derivadas parciais.

Dimensão *n*×*n* , para *n* variáveis

Em cada coluna a variável do índice respetivo deriva primeiro. A linha dita o índice da variável sobre a qual a segunda derivada é calculada. Como tal a diagonal contem a mesma variável a ser duplamente derivada.

*f xx f yx f zx* ⋯

*fxy fyy fzy* ⋯

*X*=[ *x y z* ⋯] ⇒ *Hess f* ( *X*)[

⋮ ⋮ ⋮ ⋱]

*f xz f yz f zz* ⋯

**Aproximação quadrática ordem 2)**

+(*fx*2(*a*)*h*12+*fy*2 (*a*)*h*22+2 *f x y*(*a*)*h*1*h*2 ⏟)/2

Na aproximação quadrática do ponto *a*+*h* usa-se o seguinte desenvolvimento:

*f* (*a*+*h*)=⏟*f* (*a*) ponto

+ *f x*(*a*)*h*1+ *f y* ⏟(*a*)*h*2 apróximação linear

apróximação quadrática

+*hT*⏟×*Hess f* (*a*)×*h*/2

O qual pode ser escrito na forma vetorial:

*f* (*a*+*h*)≈⏟*f* (*a*) ponto

+ ∇ *f* (*a*)*T* ⏟×*h* apróximação linear

apróximação quadrática

**Estudo de extremos**

**Pontos estacionários**

Se *f* : *D*⊆ℝ*n*→ℝ e *a* um ponto interior: Quando todas as derivadas parciais de *f* existem no ponto *a* e ∇ *f* (*a*)=0 então *a* é um ponto estacionário (ou critico).

Um ponto estacionário pode ser um extremo ou um ponto de sela.

**Extremos locais**

*****Ponto de sela*

Sendo *f* : *D*⊆ℝ*n*→ℝ uma função diferenciável ou de classe *Cn* • Se *det* (*Hess f* (*a*))<0 então *f* (*a*) não é extremo (ponto de sela) • Se *det* (*Hess f* (*a*))>0 então *f* (*a*) é um extremo relativo.

◦ Se *f xx*(*a*)>0∨*f yy*(*a*)>0 então *f* (*a*) é um mínimo relativo. ◦ Se *f xx*(*a*)<0∨*f yy*(*a*)<0 então *f* (*a*) é um máximo relativo. • Se *det* (*Hess f* (*a*))=0 então nada se pode concluir.

**Extremos absolutos**

Se *f* é continua num compacto, o teorema de Weierstrass garante existência de máximo e mínimo absolutos, os quais por entre os extremos relativos.

Não há nenhuma forma garantida de encontrar extremos absolutos sem ser o estudo da função.

Para restringir o domínio de forma a encontrar um extremo absoluto do sub dominio aplicam-se os multiplicadores de Lagrange (ver abaixo, maximização por Lagrange).

**Propriedades do Gradiente**

Se *f* (*a*) é diferenciável: *f ’u*⃗(*a*)=*d f* (*a*)⋅(*u*⃗)=∇ *f* (*a*)*T*⋅*u*

*f* :ℝ*n*→ℝ

*z*=*f* (*x*)*f* (*x*)=*k* ℝ→ ℝ*n t*→*c*(*t*)

*f* (*c*(*t* ))=*k*

∇ *f* (*c*(*t*))*T*×*c'*(*t*)=0

*∵*∇ *f* (*a*) é perpendicular às curvas de nível da função que passam no ponto *a* . *z*=*f* (*x , y*)⇔ *f* (*x , y*)*– z*=0 → Plano tangente a *f* no ponto (*a ,b ,f* (*a,b*))=(*a,b,c*) . ∇ *f* (*a,b,c*)*T*[*x*−*a*

*z*−*c* ]=0 ⇔[ *f x*(*a,b*) *f y*(*a,b*)−1][*x*−*a*

*y*−*b*

*f x*(*a ,b*)(*x*−*a*)+ *f y*(*a,b*)(*x*−*a*)−*z*+*c*=0 *f* :ℝ*n*→ℝ

*z*−*c*]=0 *y*−*b*

*f* (*x*)=*f* (*a*)+∇ *f* (*a*)*T*(*x*−*a*) → Equação do plano tangente a *f* (*x*−*a*)

**Maximização por Lagrange**

[Palavreado dá para entender mas não é 100% matematicamente correto!]

Quando se deseja maximizar uma função por base numa restrição de igualdade. Seja *f* a função a maximizar, e *g* a restrição. 

Quando um conjunto de nível intersecta *g* sem

lhe ser tangente, então existe um numero infnito

de pontos dentro da restrição, não a maximizando.

Quando não intersecta *g* , então nenhum ponto

obedece à restrição.

Para *f* ser máximo é necessário descobrir os

argumentos que tornam *f* tangente a *g* . 

Para *f* e *g* serem tangentes sabe-se que os pontos

de tangência tem gradientes proporcionais

(gradientes são perpendiculares aos conjuntos de

nível).

Quer-se portanto satisfazer: ∇ *f* =λ ∇ *g*

λ denomina-se um multiplicador de Lagrange.

***Lagrangiana***

Defnida *L*(*x , y ,*⋯*,*λ)=*f* (*x , y ,*⋯)−λ(*g*(*x , y ,*⋯)−*c*)

↖ [“*L”* manuscrito]

Com *c* sendo a constante que formula a curva de nível *g*(*x , y ,*⋯)=*c*

∂*L* ∂ *x* ∂*L*

0

0

]=[

∂ *f*

∂ *x*=∂ *f*

∂ *x*−λ∂ *f*

∂ *x*=0

∂ *f*

∂ *y*=∂ *f*

∂ *y*−λ∂ *f*

∂ *y*=0

∇ *L*=0 tem o seguinte desenvolvimento: [

∂ *y*⋮

∂*L*

∂ λ

0]⇔ ⋮

⋮

∂ *f*

∂ λ=−*g*(*x, y ,*⋯)−*c*=0

Por entre as soluções possíveis deste sistema estão *n*∈ℕ0 conjuntos de argumentos que maximizam *f* perante a restrição.

***Multiplicador de Lagrange***

[Não é necessário saber]

O valor que soluciona o multiplicador de Lagrange ( λ ) pode ser utilizado para observar a variação instanttnea da solução mediante uma alteração na restrição. Se *f* for reescrita em função de *c* , tem-se que: ∂ *f*

∂*c*=λ

**Teorema da Função Implícita**

Para uma função *f* : *D*⊆ℝ2→ℝ defnida num aberto *D*∋(*a ,b*) , se: • *f* (*a ,b*)=0

• *f* ∈*C*1(*D*)

•∂ *f*

∂ *y*(*a ,b*)≠0

Então:

*f* (*x, y*)=0 defne implicitamente *y* como função de *x* numa vizinhança de (*a ,b*) .

Se *y*=ϕ(*x*) na vizinhança tem-se que ϕ∈*C*1 e:

∂ *f*

ϕ*'*(*x*)=−

∂ *x*(*x ,d*(*x*)) ∂ *f*

∂ *y*(*x,*ϕ(*x*))

Formalmente:

*f* (*x, y*)=0 defne *y* implicitamente como função de *x* se existirem vizinhanças *U* de *a* , *V* de *b* e ϕ:*U* →*V* tais que ∀(*x , y*)∈*U*×*V , f* (*x, y*)=0⇔ *y*−ϕ(*x*)=0 .

(Se o ponto respeitar os requisitos, então existe uma vizinhança que também o faz, existindo um ϕ(*x*) que defne *y* em todo o espaço da vizinhança)

**Teorema da Função Inversa**

Uma função *f* : *A*→*B* é injetiva se ∀ *x , y*∈ *A ,x*≠*y*⇒ *f* (*x*)≠*f* (*y*) (É injetiva se não houverem dois pontos do domínio com a mesma imagem)

Se *f* : *A*⊆ℝ*n*→ℝ*n* for injetiva, então existe *g*: *f* ( *A*)→ *A* tal que (*g*∘ *f* )(*x*)=*g*(*f* (*x*))=*x* .

(Se for bijectiva tem de haver uma função que reverta a aplicação da função) Para *f* : *D*⊆ℝ*n*→⊆ℝ*n* com *D* aberto, *f* ∈*C*1, *a*∈*D* ; se *det* ( *Jac f* (*a*)≠0) :

• Existem vizinhanças *U* de *a* , *V* de *f* (*a*) tais que *f* é uma bijecção de *U* sobre *V* , logo *f*−1:*V*→*U* defnida

• *f*−1∈*C*1(*V* )

• *Jac f*−1(*f* (*x*))=[ *Jac f* (*x*)]−1

**Integração Múltipla**

**Particionamento**

Havendo um rettngulo *R*∈ℝ2: 

Se os segmentos de reta resultantes da projeção de

*R* nos eixos coordenados forem divididos em *n*

sub segmentos, delimitados por *n*+1 pontos e sem

intersecção.

*a*=*x*0<*x*1<⋯<*xn*=*b*

*c*=*y*0< *y*1<⋯<*yn*=*d*

Forma-se uma grelha de *n*2 rettngulos sobre *R*

em que o conjunto dos sub- rettngulos (**partições**)

é dado na forma: *Rij*=[ *xi, xi*+1]×[ *y j, y j*+1] , *i*∈{0,⋯*,n*−1} *j*∈{0,⋯*,n*−1}

*f* : *D*⊆ℝ2→ℝ (limitada), é integrável em *R* , se: Sup *sRij*(*f* ) = Inf *SRij*(*f* ) Isto é, se a criação de *k* partições (em que *k*→+∞ ) faz com que o supremo (maior valor) iguale o ínfmo (menor valor) de todas as partições.

Designa-se: ∫∫*Rf* (*x, y*)*dx dy* .

Quando se passa a operar em domínios em ℝ3 (ou 

superiores) a metodologia é a mesma. Para um

domínio restrito a um paralelepípedo faz-se uma

grelha com sub-paralelepípedos (em ambas as

dimensões, imagine-se um cubo feito com vários sub

cubos).

Designa-se: ∫∫∫*Rf* (*x, y ,z*)*dx dy dz* .

**Teorema de Fubini**

O integral duplo de uma função continua defnida num domínio limitado por constantes (retangular, parelelipípedrico, hiperparalelipípedrido) pode ser resolvido primeiro em ordem a qualquer uma das variáveis, sem ser necessário ajustar os extremos.

*b*∫

*d*

*d*∫

∫ *a*

*f* (*x, y*)*dx dy*=∫ *c*

*c*

*b*

*f* (*x , y*)*dy dx a*

*a*2∫

*b*2∫

*c*2

*c*2∫

*b*2∫

∫ *a*1

*b*1

*f* (*x, y ,z*)*dx dy dz*=∫ *c*1

*c*1

*b*1

*a*2

*f* (*x , y ,z*)*dz dy dx*=⋯ *a*1

Note-se que há *n!* permutações possíveis, para uma serie de *n* integrais.

**Método de Cavalier para calculo de volumes** Tendo uma função *A*(*z*) que dê a área de todas as

“fatias” possíveis do sólido, o volume do sólido pode

ser calculado com o integral:

*b*

∫

*A*(*z*)*dz* , em que os extremos do integral são os *a*

pontos de inicio e fm do sólido no eixo perpendicular às “fatias”. 

Esse *A*(*z*) pode ser o resultado de um integral que calcule a área da dita fatia.

**Conjuntos de integração**

**Conjuntos verticalmente simples** Quando a função a região de integração limitada horizontalmente por retas e verticalmente por quaisquer duas funções continuas. 

*b*∫

∫∫ *Rf* (*x , y*)*dx dy*=∫ *a*

*h*(*x*)

*f* (*x , y*)*dy dx g*(*x*)

**Conjuntos horizontalmente simples** 

Quando a região de integração está limitada verticalmente por retas e horizontalmente por duas funções continuas.

*d*∫

∫∫*Sf* (*x , y*)*dx dy*=∫ *c*

**Propriedades** *f ,g*:ℝ2→ℝ

*j*( *y*)

*f* (*x , y*)*dx dy i*(*y* )

• Se *A*=*A*1∪*A*1,int ( *A*1)∩int( *A*2)=∅ e *f* integrável em *A*1 e *A*2 então é integrável em *A* e: 

∫*Af* (*x , y*)*dx dy*=∫*A*1*f* (*x , y*)*dx dy*+∫*A*2*f* (*x , y*)*dxdy*

• Se *f ,g* integráveis em *A* e *c*∈ℝ :

∫∫*A*(*f* +*cg*)(*x , y*)*dx dy*=∫∫*Af* (*x , y*)*dx dy* + *c*∫∫*Ag*(*x , y*)*dx dy* • Se *f* (*x, y*)≥*g*(*x, y*) então ∫∫*Af* (*x , y*)*dx dy*≥∫∫*Ag*(*x , y*)*dxdy* • Se *f* integrável |*f*| é integrável e |∫∫*Af* (*x , y*)|≤∫∫*A*|*f* (*x , y*)|

**Aplicações**

***Área de domínio plano*** 

∫∫*A*1*dx dy*

***Volume compreendido entre o gráfco de duas***

***funções***

∫∫*Af* (*x , y*)*–g*(*x , y*)*dx dy*

***Volume de sólido***

∫∫∫*S*1*dx dy dz*

***Massa de lamina fna***

Entenda-se por lamina fna uma com espessura desprezável. Sendo ρ(*x , y*) a densidade, a massa calcula-se *M*=∫∫*A*ρ(*x , y*)*dx dy* .

***Massa de Sólido***

Sendo ρ(*x , y , z*) a densidade, a massa calcula-se *M*=∫∫∫*S*ρ(*x, y ,z*)*dx dy dz*

***Centro de massa de lamina fna***

Momento de massa em relação ao eixo *x* : *Mx*=∫∫*Ay* ρ(*x , y*)*dx dy* Momento de massa em relação ao eixo *y* : *My*=∫∫*Ax*ρ(*x , y*)*dx dy* Centro de massa: *CM*=(*Mx*

*M,My*

*M* ).

***Centro de massa de um sólido***

Momento de massa em relação ao plano *YoZ* : *Mx*=∫∫∫*Ax*ρ(*x , y , z*)*dxdy dz* Momento de massa em relação ao plano *XoZ* : *My*=∫∫∫*Ay*ρ(*x , y ,z*)*dx dy dz* Momento de massa em relação ao plano *XoY* : *Mz*=∫∫∫*Az*ρ(*x , y ,z*)*dx dy dz* Centro de massa: *CM*=(*Mx*

*M,My*

*M,Mz*

*M* ).

***Momentos de inércia de uma lamina fna***

Medem tendencial de resistência no movimento de rotação.

Para cada eixo são dados por:

*Ix*=∫∫*Ay*2ρ(*x , y*)*dxdy Iy*=∫∫*Ax*2ρ(*x, y*)*dx dy*

***Momento de inércia de um sólido relativamente a um eixo***

Sendo ρ(*x , y , z*) a densidade do sólido e a distancia ao eixo *Z* : *d*=√ *x*2+ *y*2 *I*=∫∫∫*S*(*x*2+ *y*2)ρ(*x , y , z*)*dx dy dz* é o momento de inércia ao eixo do *Z* . [Continuar, aula 5/12]

**Mudança de variáveis**

Sejam *f* :ℝ*n*→*R* uma função continua e *T* :*S*→*R* uma função vetorial. Sabendo que *T*(*S*)=*R* , se:

• *T*∈*C*1

• *T* injetiva em *S*

• O Jacobiano de *T* não se anula no interior de *S*

Então:

∫∫*Rf* (*x, y*)*dx dy*=∫∫*Sf* (*x*(*u,v*)*, y*(*u,v*))|*det* ∂(*x , y*)

∂(*u,v*)|*dudv*

∫∫∫*Rf* (*x, y ,z*)*dx dy dz*=

∫∫∫*Sf* (*x*(*u ,v,w*)*, y*(*u,v ,w*)*, z*(*u ,v,w*))|*det*∂(*x , y ,z*)

∂(*u ,v ,w*)|*dudv dw*

Idem para as restantes dimensões.

**Extremos de integração**

Quando uma variável é alterada é necessário que os extremos sejam ajustados ao novo domínio.

Para a mudança *x*=ϕ(*t*) ser feita, as constantes são *a* e *b* são recalculadas *a*=ϕ(α) , *b*=ϕ(β) :

*b*

∫ *a*

ϕ(β)

*f* (*x*)*dx*= ∫ ϕ(α)

*f* (ϕ(*t*))ϕ *'*(*t*)*dt*

**Sistemas de coordenadas**

**Coordenadas polares**

A mudança de variável a efetuar é:

*y*=ρsinθ⇔cos θ=*x*ρ

cosθ=*x*ρ

{*x*=ρcos θ

sinθ=*y*ρ

sinθ=*y*ρ

Note-se que: *x*2+ *y*2=ρ2cos2θ+ρ2sin2θ=ρ2

A Jacobiana de uma transformação para polares é:

∂(*x , y*)

∂(ρ*,*θ)=[cosθ −ρsinθ

sinθ ρ cosθ ]

O seu determinante ρcos2θ+ρsin2θ = ρ .

Uma vez que ρ é sempre positivo, o Jacobiano é ρ .

**Coordenadas cilíndricas**

Similares às polares, mas com profundidade (dada em forma cartesiana).

Componente no plano *XoY* é dado em coordenadas polares, componente de *Z* é dada na forma cartesiana.

A mudança de variável a efetuar é:

{*x*=*r* cosθ

*y*=*r* sinθ *z*=*z*

−∞<*z*<+∞ θ ∈[0,2 π[ *r*≥0 

A Jacobiana de uma transformação para cilíndricas é:

∂(*x , y , z*)

cosθ −*r* sinθ 0

∂(*r ,*θ *, z*)=[

0 0 1]

sinθ *r* cos θ 0

O seu determinante *r* cos2θ+*r* sin2θ = *r* . Uma vez que *r* é sempre positivo, o Jacobiano é *r* .

**Coordenadas esféricas** 

Similares às polares, mas com mais uma dimensão. Utilizadas principalmente para lidar com domínios esféricos.

Evitar utilizar com domínios que não sejam literalmente uma esfera, ou parte de uma, em caso de duvida é cilíndricas que se quer.

A mudança de variáveis a efetuar é:

*x*=ρsin(ϕ)cos(θ) {

*y*=ρsin(ϕ)sin(θ) *z*=ρ cos(ϕ)

ϕ ∈[ 0,π[ θ ∈[0,2 π[ ρ≥0

A Jacobiana de uma transformação para esféricas é:

∂(*x , y , z*)

sinϕcosθ −ρsinϕsinθ ρcosϕ cosθ

∂(ρ*,*θ*,*ϕ)=[

cos ϕ 0 −ρsinϕ ]

sinϕsinθ ρsinϕcosθ ρcos ϕsinθ

O seu determinante −ρ2sinϕ .

Uma vez que ρ e sin(ϕ) são sempre positivos, o Jacobiano é ρ2sinϕ .

**Perdidos e .. perdidos só**

Teorema

Sendo *f* : *D*⊆ℝ*n*→ℝ e *a* um ponto interior ao domínio.

Se *f* diferenciável em *a* , [...]

*df* (*a*)(*h*)=*La*(*h*)=∂*d*

∂ *x*1(*a*)*h*1+∂*d*

∂ *x*2(*a*)*h*2+⋯+∂ *d*

∂ *xn*(*a*)*hn*=∇ *f* (*a*)*Th*

Sendo *f* :ℝ*n*→ℝ*p* e *a* um ponto interior ao domínio.

*f* é diferenciável em *a* , só se para todo o *i*∈{1,⋯*,p*} *f i*:ℝ→ℝ Se *f*é diferenciável em a então as derivadas parciais ∂ *f i*

∂ *xj* existem para todo o

*i*∈{1,⋯*,p*} *j*∈{1,⋯*,n*} :

∂ *f* 1

∂ *x*1(*a*) ⋯∂ *f* 1

∂ *xn*(*a*)

*h*1⋮

*hn*]= *Jacf*(*a*)×*h* = [∇ *f* 1(*a*)∇ *f* 2(*a*)⋯∇ *f p*(*a*)]*Th*

*df* (*a*)(*h*)=[

∂ *xn*(*a*)][

⋮ ⋮

∂ *f p*

∂ *x*1(*a*) ⋯∂ *f p*

Sabe-se (por Taylor, ver acima) que uma função pode ser defnida por: *f* (*a*+*h*)=*f* (*a*)+∇ *f* (*a*)*T*×*h*+*hT*×*Hess f* (*a*)×*h*/2+‖*h*‖2ϵ(*h*) .

Se um ponto *a* for estacionário, então ∇ *f* (*a*)=0 , estabelecendo a equivalência: *f* (*a*+*h*)−*f* (*a*) = *hT*×*Hess f* (*a*)×*h*/2+‖*h*‖2ϵ(*h*)

Quando *h* tende para 0 , *hT*×*Hess f* (*a*)×*h* > ‖*h*‖2ϵ(*h*) pelo que: • *hT*×*Hess f* (*a*)×*h*≥0 então *f* (*a*) é mínimo relativo.

• *hT*×*Hess f* (*a*)×*h*≤0 então *f* (*a*) é máximo relativo.

• Se *hT*×*Hess f* (*a*)×*h* oscila de sinal, então *f* (*a*) é ponto de sela. **Raciocinio extremos absolutos**

Façam-se as seguintes mudanças de variável: ∂2*f*

∂ *x*12 =*r* , ∂2*f*

∂ *x*1 ∂ *x*2=*s* , ∂2*f*

∂ *x*22 =*t*

Então:

∂ *x*12*h*12+∂2*fh*12

*P*(*h*1,*h*2) = *hT Hess f* (*a*)*h* =∂2*f*

∂ *x*1∂ *x*2*h*1*h*2+∂2*f*

∂ *x*22*h*22 = *r h*12+2*sh*1*h*2+*t h*22

[P → ?? , alguma diferença nestes cálculos por não dividir por 1/2?] Note-se que *hess f* (*a*) = [*r s*

*s t* ] e portanto *rt*−*s*2 = *det* (*hess f* (*a*)) .

Se *r*=*t*=0 e *s*≠0 :

*P*(*h*1.*h*2)=2*s h*1*h*2 não tem sinal fxo na vizinhança de *a* . *a* não é extremo. Se *r*≠0 e supondo que *h*2≠0 :

2

*P*(*h*1,*h*2)=*h*22(*r* (*h*1

+2 *sh*1

*h*2 )

*h*2+*t*)=⏟

*h*22(*r* α2+2*s*α+*t*)

α=*h*1

*h*2

Pela formula resolvente: *r* α2+2 *s*α+*t*=0⇔α=−2 *s±*√4*s*2*–*4*rt*

2*r*

Sabe-se que 4*s*2−4*rt*>0⇔*s*2*–rt*>0 então *P*(*h*1,*h*2) oscila o sinal na vizinhança de *a* [porquê?], logo *f* (*a*) não é extremo.

Quando *s*2−*rt*<0 : [porquê é que *t* não é considerado?]

Se *r* >0 então *P*(*h*1,*h*2)≥0 logo *f* (*a*) é mínimo relativo.

Se *r* <0 então *P*(*h*1,*h*2)≤0 logo *f* (*a*) é máximo relativo.

Se *h*2=0 então *P*(*h*1,0)=*r h*12 [portanto *r* dita se é mínimo ou máximo ou mínimo, tal como nos casos acima, exceto quando *h*1=0 (?)]

[Quando *t*≠0 e supondo que *h*1≠0 :

Se *t*>0 então *P*(*h*1,*h*2)≥0 logo *f* (*a*) é mínimo relativo.

Se *t*<0 então *P*(*h*1,*h*2)≤0 logo *f* (*a*) é máximo relativo.

Se *h*1=0 então *P*(0,*h*2)=*t h*22 [portanto *t* dita se é mínimo ou máximo ou mínimo, tal como nos casos acima, exceto quando *h*2=0 (?)]]