Sucessões em $\mathbb{R}^n$

Definição

Uma sucessão em $\mathbb{R}^n$ *é uma função*

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$$

$$m \hookrightarrow u_m = (u_1^m, \ldots, u_n^m)$$

Exemplo: $u_m = \left(m^2, \frac{1}{m}\right)$

Definição

Diz-se que uma sucessão (u_m) *de pontos em* $\mathbb{R}^n$ *converge para* $a \in \mathbb{R}^n$ *e escreve-se* $\lim\limits_{m \to +\infty} u_m = a$ *se:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq p \Rightarrow d(u_m, a) < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq p \Rightarrow \|u_m - a\| < \epsilon$$

Sucessões em $\mathbb{R}^n$

Teorema

É condição necessária e suficiente para que a sucessão (u_m) de pontos de $\mathbb{R}^n$ convirja para $a \in \mathbb{R}^n$ que cada uma das suas sucessões coordenadas convirja para a correspondente coordenada de a.

Exemplo e Demonstração

Definição

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\forall m \in \mathbb{N}, u_m \in A$, então (u_m) diz-se uma sucessão de elementos de A.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \hookrightarrow f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Domínio (D): maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ onde a expressão $f(x_1, \ldots, x_n)$ tem significado

Cuidados:

- denominadores não nulos
- argumentos de raízes de índice par não negativos
- argumentos de logaritmos positivos
- argumentos de $\arcsin$ e $\arccos$ em $[-1, 1]$

Contra-domínio ($f(D)$):

$$f(D) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x) \wedge x \in D\}$$

Gráfico (G):

$$G = \{(x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x_1, \dots, x_n) \wedge (x_1, \dots, x_n) \in D\}$$

Exemplos