Arquitetura de Computadores

MiEI – 2016/17

DI-FCT/UNL

Aula 4

Reais em binário

- Valor de cada digito em base dez:
  - $23,45 = 2x10^1+3x10^0+4x10^{-1}+5x10^{-2}$
    10 1 1/10=0,1 1/100=0,01
- Valor de cada digito em binário:
  - $d_1d_0,d_{-1}d_{-2} = d_1x2^1+d_0x2^0+d_{-1}x2^{-1}+d_{-2}x2^{-2}$
    2 1 ½=0,5 ¼=0,25
- Exemplos:
  - $1,5_{10} = 1,1_2$ → $1x2^0+1x2^{-1}$
  - $23,125 = 10111,001_2$

Para a parte decimal 0,125:
0,125 x 2 = **0**,25
0,25 x 2 = **0**,5
0,5 x 2 = **1**,0

Representação de números reais

- Os inteiros têm uma gama limitada de valores:
  - não podem representar números fraccionários
  - números grandes necessitam de muitos bits
- Pretende-se uma grande gama de valores reais, desde muito grandes a muito pequenos. Exemplo:
  - massa do Sol: 2×10^{33} gr.
  - massa do electrão: 9×10^{-28} gr.

    intervalo de valores → 10^{61}

Representação de números reais

- Ambos representáveis em vírgula fixa, se:
  - massa do electrão: 9×10^{-28} g.

    0 , 0---------9
  - massa do Sol: 2×10^{33} g.

    2--------0 , 0

    34 dígitos , 28 dígitos → **62 dígitos significativos em base 10! e em binário?**
- Conclusão: tal é um desperdício
  - para quê tanta precisão para a massa do Sol?

Representação de números reais

- Representações possíveis:
  - virgula fixa

    exemplo (8 dígitos c/3 para parte fraccionária):

    32767,004
  - virgula flutuante

    inclui um factor de escala:

    $3{,}2767004 \times 10^4$

Notação Científica

- Pretende-se representar:
  - A gama de valores a representar (a escala) e
  - O número de dígitos significativos (a precisão)
- A notação científica permite isso:
  - na base 10: $m \times 10^e$
  - gama de valores → o número de dígitos do expoente *e*
  - precisão → o número de dígitos da mantissa *m*
- Exemplo:
  - massa do Sol: 2×10^{33} g.
  - massa do electrão: 9×10^{-28} g.

Representação de Números Reais

- Os computadores modernos permitem representar números reais no formato de vírgula flutuante
  - em base 2 será: $m \times 2^e$
  - há que codificar *m* e *e*
- Possuem *hardware* especializado para operar com este tipo de dados:
  - *FPU - Floating Point Unit*

Representação em vírgula flutuante

- Composta por três partes:
  - Sinal
  - Expoente
  - Mantissa
- Exemplo de possíveis representações:
  - Suponhamos o número 17,5

Em binário $17{,}5_{10}$ é $10001{,}1_2 \times 2^0 =$

$= 1000{,}11_2 \times 2^1 = 100{,}011_2 \times 2^2 = 10{,}0011_2 \times 2^3 =$

$= 1{,}00011_2 \times 2^4 = 0{,}100011_2 \times 2^5$

Sinal, expoente, mantissa

- Uma possível codificação do número 17,5 usando 14bits (1+5+8), se representado como $0{,}100011_2 \times 2^5$

  0 00101 10001100

  sinal expoente mantissa

- Também se consegue representar números muito maiores do que nos inteiros
  - Exemplo: 65536 = $1\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_2$ (17 bits)

  se representado como $0{,}1_2 \times 2^{17}$

  fica 0 10001 10000000

  sinal expoente mantissa

- Nota: mas como fica 8195?

  10000000000011_2 (14bits)

  $0, 10000000000011_2 \times 2^{14}$ → 0 01110 10000000 ← **perdemos precisão**

  o que fica representado é 10000000000000_2!

  (8192)

Normalização da representação

- Não há uma representação única para um número (17,5)
  - 0 00101 10001100 = $0{,}100011 * 2^5$
  - 0 00110 01000110 = $0{,}0100011 * 2^6$
  - 0 00111 00100011 = $0{,}00100011 * 2^7$

são todas equivalentes

- Uma convenção é de que o bit a 1 mais significativo da mantissa é sempre o das unidades
  - $17{,}5 = 1{,}00011 * 2^4$
  - Como este bit é sempre 1 até se escusa de representar e ganha-se um bit na mantissa

    exemplo: 0 00100 00011000

Deslocamento do expoente (1)

- Não há expoentes negativos? Como representar

  $0{,}25 = 1_2 \times 2^{-2}$?

- Podíamos usar uma representação em complemento para 2; mas também se pode usar um expoente **deslocado (*biased*)**
  - A ideia é que a representação seja sempre positiva facilitando comparações.
  - Portanto, soma-se sempre uma constante positiva ao expoente, que será próxima de metade do valor máximo representável.
  - No nosso exemplo (5 bits para expoente), usamos 16 (expoente ficará em **deslocamento 16**). Zero é representado por 16 e um valor menor que 16 corresponde a um expoente negativo.
  - Valores do expoente todo a 0 ou todo a 1 são reservados para casos especiais (0 ou infinito)

Deslocamento do expoente (2)

- $17{,}5 = 1{,}00011_2 \times 2^4$ com expoente não deslocado (com bit da mantissa escondido):

  0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0

  sinal *expoente* *mantissa*

- $1{,}00011_2 \times 2^4$ com expoente deslocado, representa-se o expoente como 4+16 = 20:

  0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0

  sinal *expoente* *mantissa*

- Para representar $0{,}25 = 1_2 \times 2^{-2}$

  representa-se o expoente como -2+16 = 14

  0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

  sinal *expoente* *mantissa*

Exemplo ("nossa" representação em 14 bits)

- Exemplo 0,03125 na "nossa" representação de vírgula flutuante:

  $0{,}03125_{10} = 0{,}00001_2 \times 2^0 = 1{,}0_2 \times 2^{-5}$

  - sendo positivo, o bit de sinal é 0;
  - usando o deslocamento 16 o campo para o expoente fica com -5+16=11;
  - escondendo o 1 mais significativo da mantissa fica:

    0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0

A norma IEEE-754 Floating Point Standard (1985)

- Precisão simples 32 bits -- float
  - Sinal 1 bit
  - Expoente 8 bits (deslocamento 127)
  - Mantissa 23 bits (c/ bit escondido)
- Precisão dupla 64 bits -- double
  - Sinal 1 bit
  - Expoente 11 bits (deslocamento 1023)
  - Mantissa 52 bits (c/ bit escondido)
- Adoptado quase universalmente

Representações especiais

- Expoente=255 (11111111_2) e mantissa= 0
  - + infinito
  - - infinito
- Expoente=255 e mantissa <> 0
  - NaN (Not a Number)
- Dois valores para 0:
  - Sinal = 0; expoente = 0, mantissa = 0
  - Sinal = 1; expoente = 0, mantissa = 0
- *Semelhante para os 64 bits*

Características dos números representáveis

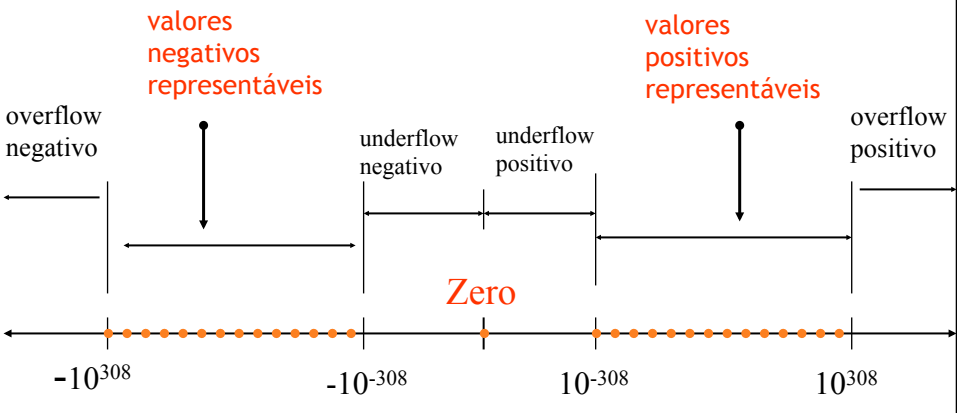
	Precisão IEEE	
	simples	dupla
Bit de sinal	1	1
Bits de expoente	8	11
Bits de mantissa	23	52
Total de bits	32	64
Expoente	excesso 127	excesso 1023
Gama expoentes	-126 a +127	-1022 a +1023
Menor número abs.	2^{-126}	2^{-1022}
Maior número abs.	$\sim 2^{128}$	$\sim 2^{1024}$
em decimal	$\sim 10^{-38}$ *a* 10^{38}	$\sim 10^{-308}$ *a* 10^{308}

Erros de representação de reais

- O conjunto dos reais é contínuo: entre quaisquer dois números há um número infinito de reais
  - com um número limitado de bits de representação só podemos representar um número finito de valores.
- A representação é assim uma aproximação; quanto mais bits tivermos melhor a aproximação
  - Não consegue representar valores demasiado grandes ou valores absolutos demasiado pequenos

Valores representáveis

- Número limitado de reais representáveis
  - Exemplo: precisão dupla (64bits)



Erros de representação de reais (2)

- Nas regiões representáveis:
  - Procurar o número de vírgula flutuante mais aproximado do número real que se quer
  - Este arredondamento introduz um erro
- O erro relativo (%):

  $$\frac{\text{diferença entre números (erro)}}{\text{número pretendido}}$$

- Se aumentar o número de dígitos:
  - de *m*, aumenta a densidade de pontos nas regiões representáveis: maior precisão
  - de *e,* aumenta o tamanho das regiões representáveis: maior gama de valores

Erros de representação de reais (3)

- O nosso formato de 14 bits representa números de
  $-1{,}111111111_2 \times 2^{15}$ a -1×2^{-15}, o 0
  e de 1×2^{-15} a $1{,}111111111_2 \times 2^{15}$
- Não consegue representar 2^{-19} ou 2^{128} por exemplo
- Também não consegue representar 128,25 pois é
  $1000\ 0000{,}01_2$
  - mas os 9 bits não cabem nos 8 bits da mantissa
  - podemos aproximar com o número 128,0

  Erro absoluto é: 0,25 O erro relativo é:

  $(128{,}25 - 128{,}0)/128{,}25 \approx 0{,}2\ \%$

Propagação de erros

- Os erros podem acumular-se; os algoritmos devem tentar minimizá-los
- 1º exemplo (nossa rep. de 14bits):

128,25*128,25=16448,0625

por aproximação de 128,25 a 128:

128*128 = 16384

(entra erro=0,25 ; sai erro=64,0625 → ~0,4%)

- 2º exemplo (nossa rep. de 14bits):

(512+1)/8 = 64,125 = (512/8)+(1/8)

513 = 1000000001_2 não é representável, logo não se deve fazer a soma primeiro;

512/8 e 1/8 são representáveis, por isso devia-se reescrever a expressão nessa forma

Operações com FP (1)

$x = X * 2^{ex}$

$y = Y * 2^{ey}$

- Adição e Subtracção:
  - se ex == ey:

$x+y \rightarrow (X+Y)*2^{ex}$

$x-y \rightarrow (X-Y)*2^{ex}$

  - se ex<>ey:

há que tornar primeiro os expoentes iguais (menor para o maior) e ajustar a mantissa

Soma em vírgula flutuante

- Exemplo na nossa representação de 14bits:

0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 +
0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0

- É preciso colocar os números com o mesmo expoente e depois alinhar para somar:

1, 1 1 0 0 1 0 0
+ 0, 0 1 1 0 0 1 1
10, 0 0 1 0 1 1 1

Normalizando e escondendo o bit das unidades:

0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1

Operações com FP (2)

- Multiplicação/divisão:

  $x*y \rightarrow X*2^{ex}*Y*2^{ey} = (X*Y)*2^{ex+ey}$

  $x/y \rightarrow (X*2^{ex})/(Y*2^{ey}) = (X/Y)*2^{ex-ey}$

  (o resultado tem de ter sempre normalizado)

- Comparações:
  - se ex > ey, então x > y
  - se ex == ey, então a comparação depende das mantissas X e Y

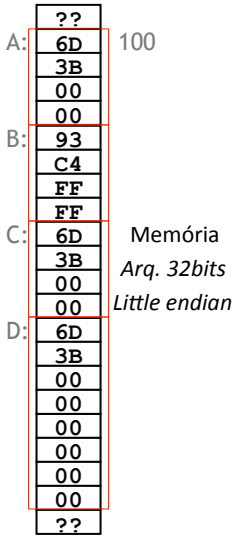
Variáveis na memória

- Variáveis são designações simbólicas para posições de memória:

```
int A = 15213;    // 0x3B6D
int B = -15213;
long C = 15213;
long long D = 15213;
```

Tabela de símbolos do compilador:

A: 100 : 4 bytes
B: 104 : 4 bytes
C: 108 : 4 bytes
D: 112 : 8 bytes



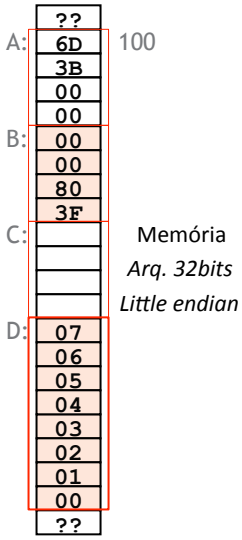
Variáveis na memória

- Qual o código produzido pelo compilador se:

```
int A = 15213;    // 0x3B6D
float B = 1.0;    // 0x3F800000
long long D = 0x01020304050607;
A = D; //Não pode copiar os 8 bytes para A!
A = B;  //Não é só copiar!
```

Tabela de símbolos do compilador:

A: 100 : 4 bytes
B: 104 : 4 bytes
D: 112 : 8 bytes



Conversões entre tipos

- O compilador de C converte valores entre diferentes tipos automaticamente ou via *cast* (coerção)
  - Tal pode levar a erros

```
int x;
long long y = x;
short z = x;  //pode ficar z != x
              //       e.g. x > SHRT_MAX
float f = x;  //pode ficar errado
x = f;    //fica só a parte inteira;
          //pode ficar errado e.g. f > INT_MAX
f = (float)y / x;  //para não dividir como inteiros
```