

Escreva nome, nº de aluno e curso em cada folha.
Cada grupo de resolução deverá ser enviado num ficheiro separado.
Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(Resposta correcta com elementos justificativos: 1,2 valores. Resposta errada ou sem elementos justificativos: 0 valores.)

1. Qual o valor de $\int_0^\pi x - \sin(x) dx$?

- (a) 1 (b) $\frac{\pi^2}{2} - 2$ (c) 2 (d) $\frac{\pi^2}{2} + 2$

2. Seja $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$. Considere a partição $P = \{0, 1/2, 1\}$. Qual o valor de $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)$?

- (a) $e - 1$ (b) $(e - 1)/2$ (c) $2 \cdot e^{\frac{1}{2}}$ (d) $(1 - e)/2$

3. Considere a região no plano delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^3$. Qual das seguintes expressões permite calcular o valor da sua área? (sugestão: esboce os gráficos de f e g)

- (a) $\int_0^1 x^3 - x dx$ (b) $\int_{-1}^1 |x| - x^3 dx$
(c) $\int_0^1 x - x^3 dx$ (d) $\int_{-1}^1 x - x^3 dx$

4. Considere uma função F , de variável real, definida por $\int_{-1}^x \frac{1}{t^2} dt$. Qual das seguintes funções poderá ser a sua derivada?

- (a) $f_1 :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{x^2}$ (b) $f_2 :]-\infty, 0[\mapsto \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2}$
(c) $f_3 :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}, \quad f_3(x) = -\frac{2}{x^3}$ (d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$

(sugestão: tenha em consideração o domínio de F .)

5. Indique qual dos seguintes integrais impróprios é absolutamente convergente.

- (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$ (b) $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$
(c) $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (d) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$

Grupo 2 (Mude de folha)

- [2,5] (a) Deduza os coeficientes a, b e c tais que

$$f(x) := \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x^2+1} + \frac{2c \cdot x}{x^2+1} \quad (x > -1)$$

e determine o integral indefinido (ou família de primitivas) de f .

- [2,5] (b) Enuncie a fórmula de primitivação por partes. Primitivando por partes duas vezes, calcule a primitiva de $x^2 \cosh(x)$ que se anula em $x = 0$.

(recorde: $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ e $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c$)

Grupo 3 (Mude de folha)

Pretende-se calcular $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x + x \ln^2(x)} dx$.

- [2,5] (a) Utilize a mudança de variável $x = e^t$ para mostrar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^n \frac{1}{x + x \ln^2(x)} dx = \int_0^{\ln(n)} \frac{1}{1+t^2} dt$$

- [2,5] (b) Calcule o integral impróprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ e utilize a alínea (a) para deduzir o valor de I .

Grupo 4 (Mude de folha)

- [1,0] (a) Seja $r : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^+$ uma função contínua e tal que $r(0) = r(2\pi)$. A função vectorial

$$\gamma : t \mapsto r(t) \cdot (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

delimita uma região no plano cuja área é calculada por

$$A := \int_0^{2\pi} \frac{r^2(t)}{2} dt$$

Admita que $r(t)$ é a função constante $r \equiv 1$. Identifique a região delimitada e calcule a sua área.

- [3,0] (b) Seja $r(t) = 1 - \cos(t)$ com $t \in [0, 2\pi]$ e, de acordo com a alínea (a), considere a região delimitada pela correspondente função vectorial γ . A região tem a forma de um coração pelo que a curva que a delimita é designada por “cardioide”.

Utilize a relação $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ para mostrar que

$$(1 - \cos(t))^2 = \frac{3}{2} - 2\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(2t)$$

Deduza, usando a fórmula da alínea anterior, a área da região delimitada pela cardioide.

Fim