Departamento de Matem´atica

3.o Teste de *An´alise Matem´atica 1* 18 de Dezembro 2019

Dura¸c˜ao: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os c´alculos efectuados.

Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a op¸c˜ao correcta. Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta:* 1*,* 2 *valores. Resposta errada com elementos justificativos:* 0 *valores. Resposta errada sem elementos justificativos:* (*−*0*,* 4) *valores.*)

1. Qual o valor de

∫ *e e−*1

1

*xdx* ?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 2 *· e*

2. Seja *f* : [0*,* 1] *7→* R uma fun¸c˜ao cont´ınua e decrescente. Considere a parti¸c˜ao *P* = *{*0*,* 1*/*2*,* 1*}*. Qual o valor de *S*(*f, P*) *− S*(*f, P*)?

(a) *f*(1) + *f*(1*/*2) (b) (*f*(1) *− f*(0))*/*2 (c) *f*(0) *− f*(1*/*2) (d) (*f*(0) *− f*(1))*/*2

∫ *ex*

3. Considere uma fun¸c˜ao *F*, de vari´avel real, cujos valores s˜ao determinados pela express˜ao 0

Qual das seguintes fun¸c˜oes poder´a ser a sua derivada?

1

1 *− t*4*dt*.

1 *− e*4*x*(b) *f*2 :] *− ∞,* 0[*7→* R*, f*2(*x*) = *ex*

(a) *f*1 :]0*,* +*∞*[*7→* R*, f*1(*x*) = *ex*

1 *− e*4*x*

1 *− e*4*x*(d) *f*4 : R*\{*0*} 7→* R*, f*4(*x*) = 1

(c) *f*3 : R *7→* R*, f*3(*x*) = 1

4. Considere a elipse *C* de equa¸c˜ao *x*2 25+*y*29= 1.

1 *− e*4*x*

Seja *r* a recta que passa no foco da elipse (*−*4*,* 0) e no v´ertice (0*,* 3). Qual das seguintes express˜oes permite calcular a ´area do sector el´ıptico limitado inferiormente pelo eixo das abcissas e limitado superiormente pela recta *r* (no segundo quadrante) e pela elipse *C* (no primeiro quadrante)?

(a) 12 + 3 *·*

∫ 5 0

√1 *− x*2*/*25 *dx* (b) ∫ 5 *−*4

4(*x* + 4) *−* 3 *·*√1 *− x*2*/*25 *dx* 3

(c) 6 + 3 *·*

∫ 5 0

√1 *− x*2*/*25 *dx* (d) 3 *·*∫ 5 *−*4

√1 *− x*2*/*25 *dx*

5. Seja *f* : [0*, π*] *7→* R uma fun¸c˜ao diferenci´avel, com derivada cont´ınua em [0*, π*]. ∫ *π*

Considere *I* = 0

cos(2*x*)*f*(*x*) *dx*.

Uma integra¸c˜ao por partes e a desigualdade triangular permitem afirmar que:

(a) *|I| ≤ π*2*·*∫ *π* 0

*f′*(*x*) *dx* (b) *|I| ≥ π*2*·* min *x∈*[0*,π*]*|f′*(*x*)*|*

(c) *|I| ≤* 12*·* max

*x∈*[0*,π*]*|f′*(*x*)*|* (d) *|I| ≤ π*2*·* max

*x∈*[0*,π*]*|f′*(*x*)*|*

(Continua no verso)

Grupo 2 (Mude de folha)

[2,5] (a) Deduza os coeficientes *a, b* e *c* tais que

*f*(*x*) := 1

*x*2(*x* + 1) =*ax*+*bx*2+*c*

*x* + 1(*x >* 0)

Determine a primitiva *F* de *f* que verifica *F*(1) = ln(2).

Resposta: Multiplicamos a equa¸c˜ao por *x*2(*x* + 1) e deduzimos

1 = *a*(*x*(*x* + 1)) + *b*(*x* + 1) + *cx*2

ou

1 = (*a* + *c*)*x*2 + (*a* + *b*)*x* + *b*

Conclu´ımos *b* = 1, *a* = *−*1 e *c* = 1. Posto que *x >* 0, obtemos, por primitiva¸c˜ao,

∫

*f*(*x*) *dx* =

∫

*−*1*x*+1*x*2+1

*x* + 1*dx* = *−* ln(*x*) *−*1*x*+ ln(*x* + 1) + *c*

A condi¸c˜ao *F*(1) = ln(2), implica

*−* ln(1) *−* 1 + ln(2) + *c* = ln(2)

pelo que *c* = 1.

∫

[2,5] cos(*x*) sinh(*x*) *dx*. (b) Utilizando uma primitiva¸c˜ao por partes c´ıclica, calcule

(recorde: sinh(*x*) = (*ex − e−x*)*/*2 e ∫sinh(*x*) *dx* = cosh(*x*) + *c*)

∫

Resposta: Temos cos(*x*) cosh(*x*) *−*

cos(*x*) sinh(*x*) *dx* =

∫

(*−* sin(*x*)) cosh(*x*)) *dx* = cos(*x*) cosh(*x*) + sin(*x*) sinh(*x*) *−*

∫

cos(*x*) sinh(*x*) *dx*

Resolvendo a equa¸c˜ao em ordem `a primitiva, conclu´ımos que

∫

cos(*x*) sinh(*x*) = 12*·* (cos(*x*) cosh(*x*) + sin(*x*) sinh(*x*)) + *c* Grupo 3 (Mude de folha)

Pretende-se calcular o integral impr´oprio *I* =

∫ 0

*−∞*

1

2 + *ex* + 2*e−xdx*.

(a) Utilize a mudan¸ca de vari´avel *e* [2,5] *x* = *t* para mostrar que

∫ 0

1

1 + (1 + *t*)2*dt*

*−L*

em que *L >* 0.

1

2 + *ex* + 2*e−xdx* =

∫ 1

*e−L*

Resposta: Considerando *ex* = *t* temos

*x*(*t*) = ln(*t*) e *x′*(*t*) = *dxdt* = 1*/t*

O extremo de integra¸c˜ao *x* = *−L* ´e convertido no extremo *t* = *e−L* e o extremo de integra¸c˜ao *x* = 0 converte-se em *t* = 1. Podemos ent˜ao escrever

∫ 0 *−L*

1

2 + *ex* + 2*e−xdx* =

∫ 1

*e−L*

2 + *t* + 2*t−*1*·*1*tdt* =∫ 1

1

*e−L*

1

2*t* + *t*2 + 2*dt* =

∫ 1

*e−L*

1

1 + (*t* + 1)2*dt*

∫ 1

1

[2,5] *dt* e conclua sobre o valor de *I*.

(b) Calcule o integral 0

Resposta:

∫ 1

1

1 + (1 + *t*)2

1 + (1 + *t*)2*dt* = [arctan(1 + *t*)]10 = arctan(2) *−* arctan(1) = arctan(2) *−π*4 0

Observe agora que, pela defini¸c˜ao de integral impr´oprio e pela al´ınea anterior,

*I* = lim *L→*+*∞*

∫ 0 *−L*

1

2 + *ex* + 2*e−xdx* = lim *L→*+*∞*

∫ 1

*e−L*

1

1 + (*t* + 1)2*dt* =

∫ 1 0

1

1 + (1 + *t*)2*dt*

sendo o valor do ´ultimo membro arctan(2) *−π*4.

Grupo 4 (Mude de folha)

[2,0] (a) Seja *h >* 0. Mostre que o volume *V* do s´olido gerado por revolu¸c˜ao em torno do eixo dos *x* da regi˜ao delimitada pelo gr´afico da fun¸c˜ao

*f* : [0*, h*] *7→* R *, f*(*x*) = *√~~x~~*

´e dado por *V* (*h*) = *π · h*2

2. (*recorde: Vx* =

∫ *b a*

*πf* 2(*x*) *dx*)

Resposta: De acordo com a f´ormula dada nas aulas te´oricas, temos

∫ *h* 0

*π ·* (*√~~x~~*)2*dx* =∫ *h* 0

*π · x dx* =[*π · x*2*/*2]*h*0=*π · h*2 2

[2,0] (b) Admita que o s´olido descrito na al´ınea anterior ´e um recipiente que est´a a ser repleto de ´agua (o eixo de rota¸c˜ao do recipiente encontra-se na vertical e a base coincide com a origem do referencial). Sabemos que o volume de ´agua no recipiente num instante *t* verifica

∫ *t*

*V* (*t*) =

0

*g*(*s*) *ds* (*t ≥* 0)

em que *g*(*t*) ´e o d´ebito do abastecimento de ´agua no instante *t*. Admita que *h*(*t*), a altura do n´ıvel da ´agua medida no instante *t*, ´e *h*(*t*) =

√*t*

*π*. Calcule o d´ebito *g*(*t*).

Resposta: De acordo com a f´ormula estabelecida na al´ınea anterior, o volume contido no recipiente no

instante *t* ´e

*V* (*t*) = *π · h*(*t*)2 2

√

em que *h*(*t*) ´e a altura da ´agua no instante *t*. A condi¸c˜ao *h*(*t*) = *V* (*t*) = *π ·tπ*

2=*t*2

*t*

*π*determina

Finalmente, resulta da rela¸c˜ao estabelecida entre o volume *V* e o d´ebito *g*, por aplica¸c˜ao do Teorema

Fundamental do C´alculo,

*g*(*t*) = *ddt* ∫ *t*0*g*(*s*) *ds* =*ddt V* (*t*) = 12

pelo que o d´ebito ´e constante e igual a 1/2 (unidades de volume por unidade de tempo). Fim

3