FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

2.º Teste de ***Análise Matemática 1***
15 de Novembro 2019
Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta:* $1,2$ *valores. Resposta errada com elementos justificativos:* 0 *valores. Resposta errada sem elementos justificativos:* $(-0,4)$ *valores.*)

1. Qual o valor da derivada da função $g(x) = \arctan(x^2)$ no ponto $x = -1$?

(a) -2 **(b)** -1 **(c)** 0 **(d)** 2

2. Qual o valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$?

(a) -1 **(b)** 0 **(c)** $\dfrac{1}{2}$ **(d)** $+\infty$

3. Considere a função $v : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ tal que $v(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$. Podemos afirmar que:

(a) O gráfico de v não tem pontos de inflexão.
(b) O gráfico de v tem um único ponto de inflexão com abcissa $x < 1$.
(c) O gráfico de v tem um único ponto de inflexão com abcissa $x \geq 1$.
(d) O gráfico de v tem pelo menos dois pontos de inflexão distintos.

4. Seja $f : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ uma função real de variável real, contínua em $[0, \pi]$, diferenciável em $]0, \pi[$. Qual das seguintes equações tem pelo menos uma solução em $]0, \pi[$?

(Sugestão: verifique a aplicabilidade dos teoremas de Rolle, Darboux ou Cauchy.)

(a) $(\cos(x)f(x))' = 0$. **(b)** $f'(x) = 0$.

(c) $\dfrac{f(\pi) - f(0)}{e^\pi - e^0} = \dfrac{1}{e^x}$. **(d)** $(\sin(x)f(x))' = 0$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função bijectiva, diferenciável, tal que f^{-1}, a inversa para a composição de funções, é diferenciável. Sabemos que $f(1) = 2$ e que $f'(1) = -1$. Seja $h :]-2, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f((x+1)e^x)$. Sabemos que h é injectiva e que h^{-1} é diferenciável no seu domínio. Podemos afirmar que:

(a) $(h^{-1})'(2) = \dfrac{1}{h'(0)} = -\dfrac{1}{2}$ **(b)** $(h^{-1})'(2) = \dfrac{1}{h'(0)} = 1$

(c) $(h^{-1})'(2) = \dfrac{1}{h'(0)} = \dfrac{1}{2}$ **(d)** $(h^{-1})'(2) = \dfrac{1}{h'(2)} = -\dfrac{1}{2}$

(**Continua no verso**)

Grupo 2 (Mude de folha)

Considere a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$

[2,0] **(a)** Calcule f' e conclua que f é estritamente crescente.

Resposta: Temos

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{(x-1)^2}{1 + x^2}$$

A função tem derivada positiva em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ e é contínua, sendo por isso estritamente crescente em $\mathbb{R}$. Alternativamente, podemos afirmar que, pelo Teorema de Lagrange, f é estritamente crescente em $]-\infty, 1]$ e estritamente crescente em $[1, +\infty[$, o que, aliado à continuidade de f em $x = 1$, garante o crescimento estrito em $\mathbb{R}$.

[2,0] **(b)** Mostre que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = 0$ e conclua que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Resposta: Posto que $\ln(1 + x^2)$ e x tendem para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$, podemos aplicar a Regra de L'Hospital-Cauchy. Ora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x/(1 + x^2)}{1} = 0$$

pelo que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x/(1 + x^2)}{1} = 0$$

Podemos então concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1 - \ln(1 + x^2)/x) = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$$

[1,0] **(c)** Mostre que, para todo o $k \in \mathbb{R}$, a equação $f(x) = k$ tem uma e uma só solução. Para tal, estude o limite de f em $-\infty$ e utilize um resultado célebre sobre funções contínuas.

Resposta: Temos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - (+\infty) = -\infty$$

Seja $k \in \mathbb{R}$. O estudo dos limites de f em $-\infty$ e $+\infty$ permite-nos afirmar a existência de números reais $a < b$ tais que

$$f(a) < k < f(b)$$

Posto que a função f é contínua em $[a, b]$, resulta do Teorema de Bolzano a existência de $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$. O valor c é único porque, pela alínea (a), f é estritamente crescente.

Grupo 3 (Mude de folha)

[3,0] **(a)** Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 em $x = 0$ da função $e^{-x}\sin(x)$, com resto de Lagrange, e conclua que

$$e^{-x}\sin(x) > x - x^2 \qquad \text{se} \quad x > 0$$

Resposta: Temos

$$(e^{-x}\sin(x))' = -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x) \qquad \text{e} \qquad (e^{-x}\sin(x))'' = -2e^{-x}\cos(x)$$

Temos então a fórmula de Taylor de ordem 1 em $x = 0$

$$e^{-x}\sin(x) = e^{-0}\sin(0) + (e^{-x}\sin(x))'_{x=0} \cdot x + \frac{f''(c)}{2!}x^2 = x - e^{-c}\cos(c) \cdot x^2$$

em que c está estritamente compreendido entre 0 e x. Se $x > 0$ então $c > 0$ e concluímos $e^{-c} < 1$. Além disso $|\cos(c)| \leq 1$ pelo que

$$|e^{-c}\cos(c)| < 1 \quad \text{donde} \quad -e^{-c}\cos(c) > -1$$

Como $x^2 > 0$, concluímos

$$e^{-x}\sin(x) > x - x^2$$

[2,0] **(b)** Considere a função

$$h : \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \mapsto \mathbb{R}, \qquad h(x) = 1 - |x|$$

Indique, justificando, a veracidade da afirmação,

"Existe $c \in]-1/2, 1[$ tal que $h'(c) = \dfrac{h(1) - h\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - (-1/2)}$."

Resposta: A função h não reúne as condições de aplicabilidade do Teorema de Lagrange no intervalo $[-1/2, 1]$ pois não é diferenciável em $x = 0$, que pertence ao interior de $[-1/2, 1]$. Como tal, a conclusão deste teorema não é válida. Podemos, além disso, verificar nos pontos em que h' está definida, que $h'(x) = \pm 1$ enquanto o segundo membro da igualdade é igual a $-1/3$.

Grupo 4 (Mude de folha)

Admita que a concentração de um tóxico (medida em g/m^3) nas águas de um rio após uma descarga poluente, ocorrida no instante $t = 0$, é indicada por uma função $p : [0, +\infty[$ (em que t é medido em semanas) que verifica a equação diferencial

$$p'(t) + 2p(t) = \frac{1}{10}, \qquad \forall t \in]0, +\infty[\tag{1}$$

[2,0] **(a)** Verifique que as funções de tipo $p(t) = \dfrac{1}{20} + ke^{-2t}$, em que $k \in \mathbb{R}$, verificam a equação (1).

Resposta: Temos $p'(t) = -2ke^{-2t}$ e substituindo na equação, obtemos

$$p'(t) + 2p(t) = -2ke^{-2t} + 2\left(\frac{1}{20} + ke^{-2t}\right) = 2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

[2,0] **(b)** Sabe-se que, uma semana após o início da descarga poluente, o valor de p é $\frac{1}{10}$ g/m^3. Assumindo que a concentração do tóxico é dada por uma função $p(t)$ definida na alínea (a), determine o instante $\bar{t}$ a partir do qual a sua concentração é inferior a $\frac{1}{15}$ g/m^3.

(Sugestão: Comece por determinar o parâmetro k.)

Resposta: Fazendo $t = 1$ obtemos

$$\frac{1}{20} + ke^{-2} = \frac{1}{10}$$

pelo que, resolvendo em ordem a k, obtemos $k = e^2 \cdot 1/20$. Deste modo, a função p tem, neste caso concreto, a forma

$$p(t) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20}e^{2-2t}$$

Resolvemos a inequação

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{20}e^{2-2t} < \frac{1}{15}$$

e obtemos

$$e^{2-2t} < \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad 2-2t < -\ln(3)$$

ou

$$t > \bar{t} := \frac{\ln(3)+2}{2}$$

(ou seja, aproximadamente 11 dias após a contaminação).

Fim