

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.

Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.

Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(Resposta correcta: 1,2 valores. Resposta errada com elementos justificativos: 0 valores. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) valores.)

1. Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}$ definido por $A = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup]0, +\infty[$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) $0 \in \text{int } A$ (b) $0 \notin \text{Fr } A$ (c) $0 \in \text{Ext } A$ (d) $0 \in A'$

2. Qual o limite da sucessão $u_n = \frac{n \cdot 3^n + e^n}{(n + \sqrt{n}) \cdot 3^{n+1} + n^{100}}$?

- (a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 3 (d) $+\infty$

3. Considere a sucessão $v_n = \sin(n)$. Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

- (a) (v_n) é monótona. (b) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $v_p = 0$.

- (c) (v_n) possui uma subsucessão convergente. (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = 1$

4. Considere a função injectiva $g : \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \cos(\pi - x)$. Qual das seguintes funções é a inversa g^{-1} , para a composição de funções, da função g ?

- (a) $h_1(y) = \pi - \arccos(y)$, $y \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (b) $h_2(y) = \arccos(\pi - y)$, $y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

- (c) $h_3(y) = \pi - \arccos(y)$, $y \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (d) $h_4(y) = \pi - \arcsin(y)$, $y \in [-1, 1]$

5. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{e^{x/2} - 1}{x}$. Sabemos que f é estritamente crescente.

Qual dos seguintes conjuntos poderá ser o contradomínio de f ?

- (a) $]0, 1/2[\cup]1/2, +\infty[$ (b) $]0, 2[\cup]2, +\infty[$ (c) $] -\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ (d) $\mathbb{R}$

(Continua no verso)

Grupo 2 (Mude de folha)

Pretendemos estudar a convergência da sucessão

$$v_n = \frac{2^n \cdot \sin(n)}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$$

[2.5] (a) Prove que

$$n! > 3^{n-2} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}$$

Para tal, verifique que a afirmação é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$ e utilize o método da indução para $n \geq 2$.

Resposta: Temos

$$1! > 3^{-1} \quad \text{e} \quad 2! = 2 > 1 = 3^0$$

pelo que a afirmação é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$. Verifiquemos que a propriedade é indutiva para $n \geq 2$. Supomos (hipótese de indução) que

$$n! > 3^{n-2}$$

Mostremos que $(n+1)! > 3^{n-1}$ (tese de indução). Temos

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! > (n+1) \cdot 3^{n-2} \quad \text{pela hipótese de indução.}$$

Como $n \geq 2$ temos $n+1 \geq 3$ pelo que

$$(n+1)! > 3 \cdot 3^{n-2} = 3^{n-1}$$

logo a propriedade é indutiva para $n \geq 2$. Podemos então concluir que a propriedade é verdadeira para todo o natural n .

[2.5] (b) Utilizando a alínea anterior, justifique que

$$|v_n| < 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

O que podemos concluir quanto à convergência da sucessão (v_n) ?

Resposta: Temos, pelo facto que $|\sin(n)| \leq 1$,

$$|v_n| = \left| \frac{2^n \cdot \sin(n)}{n!} \right| = \frac{2^n}{n!} \cdot |\sin(n)| \leq 2^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Por outro lado, passando ao inverso a desigualdade da alínea anterior,

$$\frac{1}{n!} < 3^{2-n} = \frac{9}{3^n}$$

Podemos então concluir que

$$0 \leq |v_n| < 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Como a sucessão $(2/3)^n$ é um infinitésimo, resulta do lema das sucessões enquadradas que $|v_n|$ tende para zero ou, equivalentemente, que (v_n) é um infinitésimo.

Grupo 3 (Mude de folha)

[3,0] (a) Considere a função $f :]-\frac{\pi}{2}, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x)}{x} & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Justifique que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ e que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. O que pode concluir quanto à continuidade de f em $x = 0$?

Resposta: Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot 1 = 1$$

tendo em conta o limite notável da função seno em $x = 0$ e o facto de $\cos(0) = 1$.

Temos também

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(x^{-1}) \cdot x = 0$$

porque $|\arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$ e o produto de uma função limitada por uma função com limite zero em $x = 0$ resulta numa função com limite zero em $x = 0$.

Concluimos que a função f não é contínua em $x = 0$ pois não tem limite em $x = 0$.

Nota: Alternativamente à limitação de $\arctan(x^{-1})$, pode-se referir

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(x^{-1}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$

e invocar a lei do produto de limites.

[2,0] (b) Considere a função $H : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Estude a continuidade em $x = 0$ da função $H + f$, em que f é a função considerada na alínea anterior.

Resposta: Temos, pela alínea anterior

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + H(x) = 1 + 0 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + H(x) = 0 + 1 = 1$$

Por outro lado, $H(0) + f(0) = 1$. Concluimos então que os limites laterais coincidem com o valor da função no ponto $x = 0$ pelo que $H + f$ é contínua neste ponto.

Grupo 4 (Mude de folha)

[2,0] (a) Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{3}{k}\right)^k$.

Sugestão: recorde que $\frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \rightarrow l$ se $u_n \rightarrow l$.

Resposta: Denotando $u_k = \left(1 + \frac{3}{k}\right)^k$, em que $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{k}\right)^k = e^3$$

Pelo resultado visto na aula teórica e recordado no enunciado, concluímos

$$\lim \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{3}{k}\right)^k = e^3$$

[2.0] (b) De uma certa função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sabe-se que f é sobrejectiva (ou seja, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$), contínua e verifica

$$|f(x) - f(y)| \geq 2 \cdot |x - y| \quad \text{para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}.$$

Justique que f tem inversa f^{-1} para a composição de funções e que

$$|f^{-1}(a) - f^{-1}(b)| \leq \frac{1}{2} \cdot |a - b| \quad \text{para quaisquer } a, b \in \mathbb{R}$$

Conclua sobre a existência de limite para a sucessão definida por recorrência por

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$$

Resposta: A condição referida no enunciado implica que

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| > 0$$

ou seja, $f(x) \neq f(y)$. Concluímos então que f é injectiva, logo bijectiva, tendo por isso uma inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ para a composição de funções.

Consideremos $x = f^{-1}(a)$ e $y = f^{-1}(b)$. Resulta da nossa hipótese sobre f que

$$|f(f^{-1}(a)) - f(f^{-1}(b))| \geq 2 \cdot |f^{-1}(a) - f^{-1}(b)|$$

ou seja

$$|a - b| \geq 2 \cdot |f^{-1}(a) - f^{-1}(b)|$$

ou

$$|f^{-1}(a) - f^{-1}(b)| \leq \frac{1}{2} |a - b|$$

Tomando agora termos consecutivos da sucessão definida por recorrência (u_n) , temos

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f^{-1}(u_{n+1}) - f^{-1}(u_n)| \leq \frac{1}{2} \cdot |u_{n+1} - u_n|$$

Verifica-se então a condição suficiente, dada na aula teórica, para a sucessão (u_n) ser de Cauchy. Concluímos que (u_n) converge para l , solução (única) da equação

$$l = f^{-1}(l) \quad \text{ou} \quad l = f(l)$$

Fim