Departamento de Matem´atica

1.o Teste-Resolu¸c˜ao de *An´alise Matem´atica 1* 16 de Outubro 2019

Dura¸c˜ao: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os c´alculos efectuados.

Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a op¸c˜ao correcta. Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta:* 1*,* 2 *valores. Resposta errada com elementos justificativos:* 0 *valores. Resposta errada sem elementos justificativos:* (*−*0*,* 4) *valores.*)

{

1. Considere o conjunto *A ⊂* R definido por *A* = Qual das seguintes afirma¸c˜oes ´e verdadeira?

*−*1*n*: *n ∈* N}*∪* ]0*,* +*∞*[.

(a) 0 *∈* int *A* (b) 0 *∈/* Fr *A* (c) 0 *∈* Ext *A* (d) 0 *∈ A′*

2. Qual o limite da sucess˜ao *un* =*n ·* 3*n* + *en*

(*n* +*~~√~~~~n~~*) *·* 3*n*+1 + *n*100 ?

(a) 0 (b) 13(c) 3 (d) +*∞*

3. Considere a sucess˜ao *vn* = sin(*n*). Indique qual das seguintes afirma¸c˜oes ´e verdadeira. (a) (*vn*) ´e mon´otona. (b) Existe *p ∈* N tal que *vp* = 0. (c) (*vn*) possui uma subsucess˜ao convergente. (d) lim *n→*+*∞vn*

*n*= 1

[

4. Considere a fun¸c˜ao injectiva *g* :

0*,*3*π*4]*7→* R tal que *g*(*x*) = cos(*π − x*). Qual das seguintes fun¸c˜oes ´e

a inversa *g−*1, para a composi¸c˜ao de fun¸c˜oes, da fun¸c˜ao *g*?

[

(a) *h*1(*y*) = *π −* arccos(*y*) , *y ∈*

[

(c) *h*3(*y*) = *π −* arccos(*y*) , *y ∈*

*−*1*,√*22](b) *h*2(*y*) = arccos(*π − y*) , *y ∈*[0*,π*4] *−*1*, −√*22](d) *h*4(*y*) = *π −* arcsin(*y*) , *y ∈* [*−*1*,* 1]

5. Seja *f* : R*\{*0*} 7→* R definida por *f*(*x*) = *ex/*2 *−* 1

*x*. Sabemos que *f* ´e estritamente crescente.

Qual dos seguintes conjuntos poder´a ser o contradom´ınio de *f*?

(a) ]0*,* 1*/*2[ *∪* ]1*/*2*,* +*∞*[ (b) ]0*,* 2[ *∪* ]2*,* +*∞*[ (c) ]*−∞,* 1[ *∪* ]1*,* +*∞*[ (d) R (Continua no verso)

Grupo 2 (Mude de folha)

Pretendemos estudar a convergˆencia da sucess˜ao

*vn* =2*n ·* sin(*n*)

*n*!*n ∈* N

[2,5] (a) Prove que

*n*! *>* 3*n−*2 para todo o *n ∈* N

Para tal, verifique que a afirma¸c˜ao ´e verdadeira para *n* = 1 e *n* = 2 e utilize o m´etodo do indu¸c˜ao para *n ≥* 2.

Resposta: Temos

1! *>* 3*−*1e 2! = 2 *>* 1 = 30

pelo que a afirma¸c˜ao ´e verdadeira para *n* = 1 e *n* = 2. Verifiquemos que a propriedade ´e indutiva para *n ≥* 2. Supomos (hip´otese de indu¸c˜ao) que

*n*! *>* 3*n−*2

Mostremos que (*n* + 1)! *>* 3*n−*1(tese de indu¸c˜ao). Temos

(*n* + 1)! = (*n* + 1) *· n*! *>* (*n* + 1) *·* 3*n−*2 pela hip´otese de indu¸c˜ao.

Como *n ≥* 2 temos *n* + 1 *≥* 3 pelo que

(*n* + 1)! *>* 3 *·* 3*n−*2 = 3*n−*1

logo a propriedade ´e indutiva para *n ≥* 2. Podemos ent˜ao concluir que a propriedade ´e verdadeira para todo o natural *n*.

[2,5] (b) Utilizando a al´ınea anterior, justifique que

*|vn| <* 9 *·*

(2 3

)*n*

O que podemos concluir quanto `a convergˆencia da sucess˜ao (*vn*)? Resposta: Temos, pelo facto que *|*sin(*n*)*| ≤* 1,

*|vn|* =

2*n ·* sin(*n*) *n*!

 =2*n*

*n*!*· |*sin(*n*)*| ≤* 2*n·*1*n*!

Por outro lado, passando ao inverso a desigualdade da al´ınea anterior, *n*!*<* 32*−n* =93*n*

1

Podemos ent˜ao concluir que

(2

)*n*

0 *≤ |vn| <* 9 *·*

3

Como a sucess˜ao (2*/*3)*n* ´e um infinit´esimo, resulta do lema das sucess˜oes enquadradas que *|vn|* tende para zero ou, equivalentemente, que (*vn*) ´e um infinit´esimo.

Grupo 3 (Mude de folha)

]

*−π*2*,* +*∞*[

[3,0] *7→* R definida por (a) Considere a fun¸c˜ao *f* :

tan(*x*)

*x*se *x <* 0 *,*

0 se *x* = 0 *,*

*x ·* arctan (1*x*)se *x >* 0 *.*

Justifique que lim

*f*(*x*) =

 

em *x* = 0?

*x→*0*−f*(*x*) = 1 e que lim

*x→*0+*f*(*x*) = 0. O que pode concluir quanto `a continuidade de *f*

Resposta: Temos

lim

*x→*0*−*

tan(*x*)

*x*= lim *x→*0*−*

sin(*x*)

*x·*1

cos(*x*)= 1 *·* 1 = 1

tendo em conta o limite not´avel da fun¸c˜ao seno em *x* = 0 e o facto de cos(0) = 1.

Temos tamb´em

*x→*0+arctan(*x−*1) *· x* = 0

lim

porque *|* arctan(*y*)*| <π*2e o produto de uma fun¸c˜ao limitada por uma fun¸c˜ao com limite zero em *x* = 0 resulta numa fun¸c˜ao com limite zero em *x* = 0.

Conclu´ımos que a fun¸c˜ao *f* n˜ao ´e cont´ınua em *x* = 0 pois n˜ao tem limite em *x* = 0.

Nota: Alternativamente `a limita¸c˜ao de arctan(*x−*1), pode-se referir

*x→*0+arctan(*x−*1) = lim *y→*+*∞*arctan(*y*) = *π*2

lim

e invocar a lei do produto de limites.

{

0 se *x <* 0

[2,0] .

(b) Considere a fun¸c˜ao *H* : R *7→* R definida por *H*(*x*) =

1 se *x ≥* 0

Estude a continuidade em *x* = 0 da fun¸c˜ao *H* + *f*, em que *f* ´e a fun¸c˜ao considerada na al´ınea anterior.

Resposta: Temos, pela al´ınea anterior

*x→*0*−f*(*x*) + *H*(*x*) = 1 + 0 = 1 e lim

lim

*x→*0+*f*(*x*) + *H*(*x*) = 0 + 1 = 1

Por outro lado, *H*(0) + *f*(0) = 1. Conclu´ımos ent˜ao que os limites laterais coincidem com o valor da fun¸c˜ao no ponto *x* = 0 pelo que *H* + *f* ´e cont´ınua neste ponto.

Grupo 4 (Mude de folha)

(

(a) Calcule lim *n→*+*∞*1*n·*∑*n*

1 +3*k*)*k*

[2,0] . *k*=1

*Sugest˜ao: recorde que u*1+*···*+*un*

*n → l se un → l*.

(

Resposta: Denotando *uk* =

1 +3*k*)*k*, em que *k ∈* N, temos 3

(

*k→*+*∞uk* = lim

1 +3*k*)*k*= *e*3

lim

*k→*+*∞*

Pelo resultado visto na aula te´orica e recordado no enunciado, conclu´ımos

lim 1*n·*∑*n k*=1

(

1 +3*k*)*k*= *e*3

[2,0] (b) De uma certa fun¸c˜ao *f* : R *7→* R sabe-se que *f* ´e sobrejectiva (ou seja, *f*(R) = R), cont´ınua e verifica *|f*(*x*) *− f*(*y*)*| ≥* 2 *· |x − y|* para quaisquer *x, y ∈* R *.*

Justique que *f* tem inversa *f−*1 para a composi¸c˜ao de fun¸c˜oes e que

*|f−*1(*a*) *− f−*1(*b*)*| ≤* 12*· |a − b|* para quaisquer *a, b ∈* R

Conclua sobre a existˆencia de limite para a sucess˜ao definida por recorrˆencia por

*u*1 = 1 *, un*+1 = *f−*1(*un*)

Resposta: A condi¸c˜ao referida no enunciado implica que

*x ̸*= *y ⇒ |f*(*x*) *− f*(*y*)*| >* 0

ou seja, *f*(*x*) *̸*= *f*(*y*). Conclu´ımos ent˜ao que *f* ´e injectiva, logo bijectiva, tendo por isso uma inversa *f−*1: R *7→* R para a composi¸c˜ao de fun¸c˜oes.

Consideremos *x* = *f−*1(*a*) e *y* = *f−*1(*b*). Resulta da nossa hip´otese sobre *f* que

*|f*(*f−*1(*a*)) *− f*(*f−*1(*b*))*| ≥* 2 *· |f−*1(*a*) *− f−*1(*b*)*|*

ou seja

*|a − b| ≥* 2 *· |f−*1(*a*) *− f−*1(*b*)*|*

ou

*|f−*1(*a*) *− f−*1(*b*)*| ≤* 12*|a − b|*

Tomando agora termos consecutivos da sucess˜ao definida por recorrˆencia (*un*), temos *|un*+2 *− un*+1*|* = *|f−*1(*un*+1) *− f−*1(*un*)*| ≤* 12*· |un*+1 *− un|*

Verifica-se ent˜ao a condi¸c˜ao suficiente, dada na aula te´orica, para a sucess˜ao (*un*) ser de Cauchy. Con

clu´ımos que (*un*) converge para *l*, solu¸c˜ao (´unica) da equa¸c˜ao *l* = *f−*1(*l*) ou *l* = *f*(*l*)

Fim

4