

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(Grupos 1,4 e 7. Resposta correcta: 1 valor. Resposta errada com elementos justificativos: 0 valores. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,3) valores.)

1. Qual das seguintes sucessões **não** é convergente?

(a) $u_n = n \cdot e^{-n}$ (b) $v_n = \frac{\sin(n)}{n}$ (c) $x_n = \left(1 + \frac{\cos(\pi n)}{n}\right)^n$ (d) $z_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n) + 1}$

2. Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}$ definido por $A = (]0, 1[\cap \mathbb{Q}) \cup [e, \pi]$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) $Fr(A) = [0, 1]$ (b) $int(A) =]0, 1[\cup]e, \pi[$ (c) $Fr(A) = \{e, \pi\}$ (d) $A' = [0, 1] \cup [e, \pi]$

Grupo 2 (Mude de folha)

[1,2] (a) Considere a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x} & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Justifique que f é contínua em $x = 0$.

Resposta: Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

pois $|\cos(1/x)| \leq 1$ e aplica-se o resultado da passagem ao limite do produto de uma função limitada por uma função com limite 0. Podemos então concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

pelo que a função é contínua.

[0,8]

(b) Considere a função contínua e estritamente crescente $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $h(x) = e^x + \arctan(x)$. Estude os limites de h em $-\infty$ e em $+\infty$ e conclua sobre o domínio de h^{-1} , inversa de h para a composição de funções.

Resposta: Temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \arctan(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = +\infty + \frac{\pi}{2} = +\infty$$

Temos, além disso,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \arctan(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

A função h é estritamente crescente e contínua pelo que o seu contradomínio é $I =]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$, sendo, por definição, I o domínio da inversa h^{-1} .

Grupo 3 (Mude de folha)

Considere a sucessão definida por recorrência por

$$v_1 = 1, \quad v_{n+1} = \sqrt{1 + |v_n|} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

[0.8] (a) Prove por indução que

$$v_n \in [1, 2], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta: Temos $v_1 = 1 \in [1, 2]$. Admitamos que $1 \leq v_n \leq 2$. Pelo crescimento da função $\sqrt{1 + |x|}$ no intervalo $[1, 2]$,

$$1 < \sqrt{2} \leq \sqrt{1 + |v_n|} \leq \sqrt{3} < 2$$

ou seja $v_{n+1} \in [1, 2]$.

[0.4] (b) Sabe-se que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$. Justifique que (v_n) é uma sucessão convergente.

Resposta: Resulta da alínea anterior que $v_n > 0$ para todo o natural n pelo que a condição $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ implica

$$v_n < v_{n+1}$$

ou seja, (v_n) é crescente. Sendo (v_n) limitada pela alínea (i), concluímos que (v_n) converge para um limite $l \in [1, 2]$.

[0.8] (c) Determine $\lim v_n$.

Resposta: Passando ao limite a fórmula de recorrência, temos

$$l = \sqrt{1 + |l|}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, e recordando que $l \in [1, 2]$ temos

$$l^2 = 1 + l$$

ou $l^2 - l - 1 = 0$. Obtemos então

$$l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e retemos apenas a solução $l = (1 + \sqrt{5})/2$ por ser a única solução em $[1, 2]$.

(Continua na página seguinte)

Grupo 4 (Mude de folha)

Na folha de resposta do Grupo 4 indique, para cada item, qual a opção correcta.
 Apresente os resultados na forma de uma grelha.

1. Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$?

(a) $-\frac{1}{6}$

(b) 0

(c) $\frac{1}{3}$

(d) $+\infty$

2. Seja $f : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ uma função real de variável real, contínua em $[0, \pi]$, diferenciável em $]0, \pi[$. Sabe-se que $f(\pi) = f(0) + 1$. Considere $g(x) = e^x$. Qual das seguintes equações tem pelo menos uma solução em $]0, \pi[$?

(a) $g'(x) \cdot f'(x) = e$

(b) $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{e^\pi - 1}$

(c) $\frac{f(\pi) - f(0)}{g'(x)} = \frac{f'(x)}{e^\pi - 1}$

(d) $(g(x) \cdot f(x))' = 0$

Grupo 5 (Mude de folha)

Considere a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida por $f(t) = \frac{2}{1 + 2e^{-t}}$.

- [1,0] (a) Mostre que $f'(t) = \frac{4e^{-t}}{(1 + 2e^{-t})^2}$ e conclua que f verifica a equação diferencial

$$f'(t) = \frac{1}{2} \cdot f(t)(2 - f(t)) \quad (1)$$

Resposta: Derivando $f(t)$ obtemos

$$f'(t) = -\frac{2}{(1 + 2e^{-t})^2} \cdot (-2e^{-t}) = \frac{4e^{-t}}{(1 + 2e^{-t})^2}$$

Verificamos que

$$\frac{1}{2} \cdot f(t)(2 - f(t)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1 + 2e^{-t}} \left(2 - \frac{2}{1 + 2e^{-t}} \right) = \frac{1}{1 + 2e^{-t}} \cdot \frac{4}{1 + 2e^{-t}} = f'(t)$$

pelo que f é solução da equação diferencial (1).

- [0,5] (b) Derive a equação (1) e obtenha

$$f''(t) = f'(t) \cdot (1 - f(t))$$

Resposta: Observamos que f é infinitamente diferenciável. Derivando ambos os membros da equação, obtemos

$$f''(t) = \frac{1}{2} \cdot (f'(t)(2 - f(t)) - f(t)f'(t)) = f'(t)(1 - f(t))$$

- [1,0] (c) Estude $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e conclua que o contradomínio de f é o intervalo $]0, 2[$.

Utilize a alínea (b) para provar que o gráfico de f tem uma inflexão num único ponto cuja abcissa t_0 é tal que $f(t_0) = 1$.

Resposta: Temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{\infty} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{1+0} = 2$$

Resulta do Teorema de Bolzano que o contradomínio de f é o intervalo $]0, 2[$. Temos, pela alínea (a) que $f' > 0$ e em particular que f é estritamente crescente. Seja t_0 o único valor tal que $f(t_0) = 1$. Teremos então, pela relação $f''(t) = f'(t) \cdot (1 - f(t))$ que $f''(t_0) = 0$ e que

$$f''(t) < 0 \quad \text{se} \quad t < t_0 \quad \text{e} \quad f''(t) > 0 \quad \text{se} \quad t > t_0$$

pelo que t_0 é o único ponto de inflexão de f .

Grupo 6 (Mude de folha)

- [1,5] (a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 em $a = 0$ da função $g(x) = x \cdot (e^x - 1)$, com resto de Lagrange. Conclua que $g(x) > x^2$ se $x > 0$.

Resposta: Temos

$$g'(x) = e^x - 1 + xe^x \quad \text{e} \quad g''(x) = (2+x) \cdot e^x$$

Temos então, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange,

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(c)}{2!}x^2 = \frac{2+c}{2} \cdot e^c \cdot x^2$$

em que c está estritamente compreendido entre 0 e x . Se $x > 0$ teremos $c > 0$ pelo que

$$\frac{2+c}{2} > 1, \quad e^c > 1, \quad x^2 > 0$$

o que implica $g(x) > x^2$ para $x > 0$.

- [1,0] (b) Justifique que a função $h : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x \cdot \sin(|x|)$ verifica as condições do Teorema de Rolle.

(Sugestão: verifique a diferenciabilidade de h em $x = 0$.)

Resposta: A função h é contínua em $[-\pi, \pi]$ e temos $h(-\pi) = h(\pi) = 0$. A função h é trivialmente diferenciável se $x \neq 0$. No caso $x = 0$ temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin(|x|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(|x|) = 0$$

pelo que f é diferenciável em $]0, \pi[$. Estão pois verificadas as condições do Teorema de Rolle.

(Continua na página seguinte)

Grupo 7 (Mude de folha)

Na folha de resposta do Grupo 7 indique, para cada item, qual a opção correcta.
 Apresente os resultados na forma de uma grelha.

1. O método de integração por partes permite-nos concluir que $\int_1^e x \ln(x) dx$ é igual a:
- (a) $\frac{e^2 + 1}{4}$ (b) $e^2 + 1$ (c) $\frac{e^2 - 1}{4}$ (d) e^3
2. Considere a função $F :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \mathbb{R}$ cujos valores são determinados pela expressão $\int_1^{\cos(x)} \frac{e^t}{t} dt$.
- Qual das seguintes expressões é igual a $F'(x)$?
- (a) $f_1(x) = e^{\cos(x)} \tan(x)$ (b) $f_2(x) = \cosh(x) \cdot \cot(x)$
- (c) $f_3(x) = \frac{e^{\cos(x)}}{\cos(x)}$ (d) $f_4(x) = -e^{\cos(x)} \tan(x)$

Grupo 8 (Mude de folha)

- [2,0] (a) Calcule o integral

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{t(\ln(t^2) + (\ln(t))^2)} dt$$

utilizando a mudança de variável $t = e^x$ e uma decomposição em fracções parciais.

Resposta:

Temos $\frac{dt}{dx} = e^x$, sendo os extremos inferiores e superiores de variação para x os valores $x = 1$ e $x = 2$.
 Deste modo,

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{t(\ln(t^2) + (\ln(t))^2)} dt = \int_1^2 \frac{1}{e^x(\ln(e^{2x}) + (\ln(e^x))^2)} \cdot e^x dx = \int_1^2 \frac{1}{2x + x^2} dx$$

Escrevemos

$$\frac{1}{2x + x^2} = \frac{1}{x(x + 2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 2} = \frac{(a + b)x + 2a}{x(x + 2)}$$

Concluimos $a + b = 0$ e $2a = 1$ pelo que $a = 1/2$ e $b = -1/2$. Deste modo

$$\int_1^2 \frac{1}{2x + x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 2} dx = \frac{1}{2} \cdot [\ln(x) - \ln(x + 2)]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

- [1,0] (b) Calcule a primitiva imediata $\int \tan(2x) dx$.

Resposta: Temos

$$\int \tan(2x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{-2 \cdot \sin(2x)}{\cos(2x)} dx = -\frac{1}{2} \cdot \ln(|\cos(2x)|) + c$$

Grupo 9 (Mude de folha)

Pretende-se estudar a convergência do integral impróprio $I = \int_0^{+\infty} \sin(x)e^{\cos(x)-x} dx$.

[1,0] (a) Justifique que, se $L > 0$,

$$\int_0^L |\sin(x)e^{\cos(x)-x}| dx \leq \int_0^L e^{1-x} dx$$

Resposta:

$$\int_0^L |\sin(x)e^{\cos(x)-x}| dx \leq \int_0^L |\sin(x)| \cdot e^{\cos(x)-x} dx \leq \int_0^L e^{1-x} dx$$

pois $|\sin(x)| \leq 1$ e, tendo em conta o crescimento da função exponencial e a majoração por 1 da função coseno,

$$e^{\cos(x)-x} \leq e^{1-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

[1,0] (b) Calcule o integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{1-x} dx$. Conclua sobre a convergência e o valor de I .

Resposta: Temos

$$\int_0^{+\infty} e^{1-x} dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_0^L e^{1-x} dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} [-e^{1-x}]_0^L = \lim_{L \rightarrow +\infty} e^1 - e^{1-L} = e^1$$

Trata-se pois de um integral impróprio convergente. Em particular, concluímos que o integral impróprio I é absolutamente convergente. Por um resultado visto nas aulas teóricas, I é convergente e verifica $|I| \leq e$.

Fim