FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

3.º Teste de ***Análise Matemática 1***
12 de Junho 2019
Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta:* $1,2$ *valores. Resposta errada com elementos justificativos:* 0 *valores. Resposta errada sem elementos justificativos:* $(-0,4)$ *valores.*)

1. Considere a função f, definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos(\ln(x))$. Seja F a primitiva de f que se anula em $x = 1$. Qual o valor de $F(e^\pi)$?

(a) -1 **(b)** 0 **(c)** $\frac{1}{2}$ **(d)** 1

2. Considere a função $g : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^3$. Considere a partição

$$P = \left\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$$

do intervalo $[-1, 1]$. Qual o valor de $\overline{S}(g, P) - \underline{S}(g, P)$?

(a) -1 **(b)** 0 **(c)** 1 **(d)** $\frac{4}{3}$

3. Qual dos seguintes integrais permite calcular a área da região do plano delimitada pela elipse com equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$?

(a) $\int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx$ **(b)** $2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx$

(c) $2\int_{-2}^{2} 1 - \frac{x^2}{4}\, dx$ **(d)** $4\int_{0}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx$

4. Considere a função $G(x) = \int_1^x e^{-t^2}\, dt$. Podemos afirmar que:

(a) $G(0) > 0$ e G é crescente em $\mathbb{R}$ **(b)** $G(1) = 0$ e G é crescente em $\mathbb{R}$

(c) $G(1) = 0$ e G é decrescente em $\mathbb{R}$ **(d)** $G(0) < 0$ e G é decrescente em $\mathbb{R}$

5. Qual o valor de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1 + x^2}\, dx$?

(a) 0 **(b)** $\frac{\pi}{2}$ **(c)** $\frac{\pi^2}{8}$ **(d)** $\frac{\pi^2}{4}$

(Continua no verso)

Grupo 2 (Mude de folha)

[3,0] **(a)** Deduza, através da resolução de um sistema, coeficientes a, b e c tais que

$$f(x) := \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} \qquad (x > 0)$$

Determine a primitiva F de f que se anula em $x = 1$ indicando o seu domínio.

Resposta: Temos

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a(x^2+1)+bx^2+cx}{x(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$$

Daqui concluímos

$$a+b=0\,, \quad c=0\,, \quad a=1$$

o que implica $b = -1$. Logo

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

A condição inicial $F(1) = 0$ implica $-\frac{1}{2}\ln(2) + c = 0$ pelo que $c = \frac{\ln(2)}{2}$. O domínio da primitiva é o maior intervalo aberto contendo o ponto em que é-nos dada a condição inicial, ou seja, $]0, +\infty[$.

[2,0] **(b)** Utilizando a técnica de primitivação por partes calcule

$$\int_0^{\pi} x\sin(3x)\,dx$$

Resposta: Temos

$$\int_0^{\pi} x\sin(3x)\,dx = \left[x\cdot(-\frac{1}{3}\cos(3x))\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)\,dx = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos(3x)\,dx$$

Ora

$$\int_0^{\pi}\cos(3x)\,dx = \left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\cdot(\sin(\pi)-\sin(0)) = 0$$

pelo que

$$\int_0^{\pi} x\sin(3x)\,dx = \frac{\pi}{3}$$

Grupo 3 (Mude de folha)

[3,0] **(a)** Utilize a mundança de variável $x = \tan(t)$ para mostrar que

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}\,dt$$

e calcule o segundo membro.

(recorde: $\tan'(t) = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$)

Resposta: A mudança de variável sugerida implica

$$x = \tan(t),\ \frac{dx}{dt} = 1 + \tan^2(t) \text{ com } t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]\,, \quad \tan(\pi/4) = 1 \text{ e } \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$$

pelo que, pelo Teorema da Mudança de Variável no integral, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2(t)\sqrt{1+\tan^2(t)}}(1+\tan^2(t))dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2(t)}\sqrt{1+\tan^2(t)}dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}\frac{1}{\cos(t)}dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}dt
\end{aligned}$$

A primitiva de $\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}$ é $-\frac{1}{\sin(t)}$ donde, pela Regra de Barrow, vem

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx &= \left[-\frac{1}{\sin(t)}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= -\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3})} - \left(-\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4})}\right) \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

[2,0] **(b)** Utilizando a versão integral da desigualdade triangular, mostre que, para $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$,

$$\left|\int_a^b \ln\left(1+\frac{\sin(x)}{2}\right)dx\right| \leq \ln(2)\cdot(b-a)$$

Resposta: Pela versão integral da desigualdade triangular temos

$$\left|\int_a^b \ln\left(1+\frac{\sin(x)}{2}\right)dx\right| \leq \int_a^b \left|\ln\left(1+\frac{\sin(x)}{2}\right)\right|dx$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2} \leq 1+\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{3}{2}$$

donde, pela monotonia da função logarítmica, vem

$$-\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln\left(1+\frac{\sin(x)}{2}\right) \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \ln(2)$$

Assim,

$$\left|\ln\left(1+\frac{\sin(x)}{2}\right)\right| \leq \ln(2)$$

e portanto

$$\left|\int_a^b \ln\left(1+\frac{\sin(x)}{2}\right)dx\right| \leq \int_a^b \left|\ln\left(1+\frac{\sin(x)}{2}\right)\right|dx \leq \int_a^b \ln(2)dx = \ln(2)\cdot(b-a)$$

Grupo 4 (Mude de folha)

[2,0] **(a)** Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(e^{-x})}{x+1}\,dx$

Resposta: O integral é impróprio porque o domínio de integração é um intervalo ilimitado. Comparemos a função integranda do integral impróprio com a função $\frac{1}{x}$. Temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\cos(e^{-x})}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \cos(e^{-x}) \cdot \frac{x}{x+1} = 1 > 0$$

pelo que o integral impróprio tem a mesma natureza que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ que sabemos ser divergente.

[0,5] **(b)** (i) Mostre que

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{2}\cosh(2x) + \frac{1}{2}$$

Resposta:

$$\cosh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \frac{1}{2}\cosh(2x) + \frac{1}{2}$$

[1,5] (ii) Admita que uma membrana elástica, unindo dois aros circulares com o mesmo diâmetro e contidos em planos paralelos, é uma superfície lateral S, que se obtem, por rotação em torno do eixo das abcissas, do gráfico da função $\cosh(x)$, com $x \in [-\ln(2), \ln(2)]$.

Determine a área da membrana. Apresente o resultado numa forma simplificada.
(sugestão: pode utilizar o resultado estabelecido em (i).)

Formulário:
$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$; $1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$;
Área de superfície lateral de revolução: $\displaystyle\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

Resposta: Utilizando a fórmula da área de superfície lateral de revolução e a fórmula fundamental da triginometria hiperbólica, tem-se

$$A := \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} 2\pi \cosh(x)\sqrt{1 + \sinh^2(x)}\,dx = \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} 2\pi \cosh^2(x)\,dx$$

Utilizando a alínea (i) e a paridade da função $\cosh(x)$, temos

$$A = 2\int_0^{\ln 2} \frac{1}{2}\cosh(2x) + \frac{1}{2}\,dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{4}\sinh(2x) + \frac{x}{2}\right]_0^{\ln(2)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\sinh(2\ln(2)) + \frac{\ln(2)}{2}\right)$$

Ora

$$\sinh(2\ln(2)) = \sinh(\ln(4)) = \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{15}{8}$$

pelo que $A = \dfrac{15\pi}{8} + 2\pi\ln(2)$.

Fim