Departamento de Matem´atica

3.o Teste de *An´alise Matem´atica 1* 12 de Junho 2019

Dura¸c˜ao: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os c´alculos efectuados.

Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a op¸c˜ao correcta. Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta:* 1*,* 2 *valores. Resposta errada com elementos justificativos:* 0 *valores. Resposta errada sem elementos justificativos:* (*−*0*,* 4) *valores.*)

1. Considere a fun¸c˜ao *f*, definida em R+ por *f*(*x*) = 1*x·* cos(ln(*x*)). Seja *F* a primitiva de *f* que se anula em *x* = 1. Qual o valor de *F*(*eπ*)?

(a) *−*1 (b) 0 (c) 12(d) 1 2. Considere a fun¸c˜ao *g* : [*−*1*,* 1] *7→* R, definida por *g*(*x*) = *x*3. Considere a parti¸c˜ao

{

*P* =

*−*1*, −*13*,*13*,* 1}

do intervalo [*−*1*,* 1]. Qual o valor de *S*(*g, P*) *− S*(*g, P*)?

(a) *−*1 (b) 0 (c) 1 (d) 43

3. Qual dos seguintes integrais permite calcular a ´area da regi˜ao do plano delimitada pela elipse com equa¸c˜ao*x*24+ *y*2 = 1?

(a)

∫ 2 *−*2

√

√

1 *−x*24*dx* (b) 2∫ 1 *−*1

1 *−x*24*dx*

(c) 2

∫ 2 *−*2

√

1 *−x*24*dx* (d) 4∫ 2 0

1 *−x*24*dx*

4. Considere a fun¸c˜ao *G*(*x*) =

∫ *x* 1

*e−t*2*dt*. Podemos afirmar que:

(a) *G*(0) *>* 0 e *G* ´e crescente em R (b) *G*(1) = 0 e *G* ´e crescente em R (c) *G*(1) = 0 e *G* ´e decrescente em R (d) *G*(0) *<* 0 e *G* ´e decrescente em R

5. Qual o valor de

∫ +*∞* 0

arctan(*x*)

1 + *x*2*dx*?

(a) 0 (b) *π*2(c) *π*28(d) *π*24 (Continua no verso)

Grupo 2 (Mude de folha)

[3,0] (a) Deduza, atrav´es da resolu¸c˜ao de um sistema, coeficientes *a, b* e *c* tais que *f*(*x*) := 1

*x*(*x*2 + 1) =*ax*+*bx* + *c*

*x*2 + 1(*x >* 0)

Determine a primitiva *F* de *f* que se anula em *x* = 1 indicando o seu dom´ınio.

Resposta: Temos

*x*(*x*2 + 1) =*a*(*x*2 + 1) + *bx*2 + *cx*

*x*(*x*2 + 1) =(*a* + *b*)*x*2 + *cx* + *a*

1

*x*(*x*2 + 1)

Daqui conclu´ımos

*a* + *b* = 0 *, c* = 0 *, a* = 1

o que implica *b* = *−*1. Logo ∫

*f*(*x*) *dx* =

∫1

*xdx −*

∫*x*

*x*2 + 1*dx* = ln(*|x|*) *−*12ln(*x*2 + 1) + *c*

A condi¸c˜ao inicial *F*(1) = 0 implica *−*12ln(2) + *c* = 0 pelo que *c* =ln(2)

2. O dom´ınio da primitiva ´e o

maior intervalo aberto contendo o ponto em que ´e-nos dada a condi¸c˜ao inicial, ou seja, ]0*,* +*∞*[.

[2,0] (b) Utilizando a t´ecnica de primitiva¸c˜ao por partes calcule

∫ *π*

*x* sin(3*x*) *dx*

0

Resposta: Temos

∫ *π* 0

[

*x* sin(3*x*) *dx* =

*x ·* (*−*13cos(3*x*))]*π*0*−*∫ *π*

(

0

*−*13cos(3*x*))*dx* =*π*3+13∫ *π* 0

cos(3*x*) *dx*

Ora∫ *π* 0

cos(3*x*) *dx* =

[1

3sin(3*x*)

]*π* 0

=13*·* (sin(*π*) *−* sin(0)) = 0

pelo que∫ *π* 0

*x* sin(3*x*) *dx* =*π*3

Grupo 3 (Mude de folha)

[3,0] (a) Utilize a mundan¸ca de vari´avel *x* = tan(*t*) para mostrar que

cos(*t*)

sin2(*t*)*dt*

e calcule o segundo membro.

∫*√*3 1

1

*x*2*~~√~~*1 + *x*2*dx* =

∫ *π*3

*π*

4

(recorde: tan*′*(*t*) = 1 + tan2(*t*) = 1

cos~~2~~(*t*))

Resposta: A mudan¸ca de vari´avel sugerida implica

*x* = tan(*t*)*,dxdt* = 1 + tan2(*t*) com *t ∈*[*π*4*,π*3]*,* tan(*π/*4) = 1 e tan(*π/*3) = *√*3

pelo que, pelo Teorema da Mudan¸ca de Vari´avel no integral, tem-se

∫*√*3 1

1

*x*2*~~√~~*1 + *x*~~2~~*dx* =

∫ *π*3

*π*

4

1

tan2(*t*)~~√~~1 + tan~~2~~(*t*)(1 + tan2(*t*))*dt*

= = =

∫ *π*3

*π*

4

∫ *π*3

*π*

4

∫ *π*3

1

tan2(*t*)

cos2(*t*) sin2(*t*)

cos(*t*)

√

1 + tan2(*t*)*dt*

1

cos(*t*)*dt*

sin2(*t*)*dt*

*π*

4

A primitiva de cos(*t*)

sin2(*t*)´e *−*1

sin(*t*)donde, pela Regra de Barrow, vem

∫*√*3 1

[

1

*x*2*~~√~~*1 + *x*2*dx* =

*−*1

sin(*t*)

] *π*3

*π*

4

(

)

= *−*1

sin( *~~π~~*3)*−*

= *−*2*~~√~~*3+2*~~√~~*2

*−*1

sin( *~~π~~*4)

[2,0] (b) Utilizando a vers˜ao integral da desigualdade triangular, mostre que, para *a, b ∈* R tais que *a < b*,

∫ *b a*

(

ln

1 +sin(*x*) 2

)

*dx*

*≤* ln(2) *·* (*b − a*)

Resposta: Pela vers˜ao integral da desigualdade triangular temos

∫ *b a*

(

ln

1 +sin(*x*) 2

)

*dx*

*≤*∫ *b a*

ln (1 +sin(*x*) 2

)*dx*

Para todo *x ∈* R1

2*≤* 1 +sin(*x*)

2*≤*32

donde, pela monotonia da fun¸c˜ao logar´ıtmica, vem

*−* ln(2) = ln

(1 2

)

*≤* ln

(

1 +sin(*x*) 2

)

*≤* ln

(3 2

)

*<* ln(2)

Assim,  ln (1 +sin(*x*) 2

e portanto

)*≤* ln(2)

∫ *b a*

(

ln

1 +sin(*x*) 2

)

*dx*

*≤*∫ *b a*

ln (1 +sin(*x*) 2

)*dx ≤*∫ *b a*

ln(2)*dx* = ln(2) *·* (*b − a*)

Grupo 4 (Mude de folha) 3

∫ +*∞*

cos(*e−x*)

[2,0] *dx*

(a) Estude a natureza do integral impr´oprio 1

*x* + 1

Resposta: O integral ´e impr´oprio porque o dom´ınio de integra¸c˜ao ´e um intervalo ilimitado. Comparemos a fun¸c˜ao integranda do integral impr´oprio com a fun¸c˜ao 1*x*. Temos

lim *x→*+*∞*

cos(*e−x*) *x*+1

1

*x*

= lim *x→*+*∞*cos(*e−x*) *·x*

*x* + 1= 1 *>* 0

pelo que o integral impr´oprio tem a mesma natureza que o integral impr´oprio ∫ +*∞* 1

ser divergente.

[0,5] (b) (i) Mostre que

1

cosh2(*x*) = 12cosh(2*x*) + 12

*xdx* que sabemos

Resposta:

cosh2(*x*) =

(*ex* + *e−x* 2

)2

=*e*2*x* + *e−*2*x* + 2

4=12cosh(2*x*) + 12

[1,5] (ii) Admita que uma membrana el´astica, unindo dois aros circulares com o mesmo diˆametro e conti dos em planos paralelos, ´e uma superf´ıcie lateral *S*, que se obtem, por rota¸c˜ao em torno do eixo das abcissas, do gr´afico da fun¸c˜ao cosh(*x*), com *x ∈* [*−* ln(2)*,* ln(2)].

Determine a ´area da membrana. Apresente o resultado numa forma simplificada.

(sugest˜ao: pode utilizar o resultado estabelecido em (i).)

*Formul´ario:*

cosh(*x*) = *ex*+*e−x*

2; 1 + sinh2(*x*) = cosh2(*x*);

*Area de superf´ıcie lateral de revolu¸c˜ao: ´*

∫ *b a*

2*πf*(*x*)√1 + (*f′*(*x*))2 *dx*

Resposta: Utilizando a f´ormula da ´area de superf´ıcie lateral de revolu¸c˜ao e a f´ormula fundamental da triginometria hiperb´olica, tem-se

*A* :=

∫ ln(2) *−* ln(2)

2*π* cosh(*x*)

√

1 + sinh2(*x*) *dx* =

∫ ln(2) *−* ln(2)

2*π* cosh2(*x*) *dx*

Utilizando a al´ınea (i) e a paridade da fun¸c˜ao cosh(*x*), temos

*A* = 2

∫ ln 2 0

2cosh(2*x*) + 12*dx* = 2 *·*[14sinh(2*x*) + *x*2]ln(2)

1

0

= 2 *·*

(1

4sinh(2 ln(2)) + ln(2) 2

)

Ora

pelo que *A* =15*π*8+ 2*π* ln(2).

sinh(2 ln(2)) = sinh(ln(4)) = 4 *−*14 2=158

Fim

4