FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado A

Análise Matemática I

3º Teste — 18 de Dezembro de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. A primitiva de $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}}$ que toma o valor 2π em $x = 2$ é a função:

   (a) $3\,\mathrm{arcsen}(\frac{x}{2}) + \pi/2.$
   (b) $3\sqrt{4-x^2} + 2\pi.$
   (c) $x\sqrt{4-x^2} + 2\pi.$
   (d) $3\,\mathrm{arcsen}(1 - \frac{x}{2}) + \pi/2.$

---

2. O valor do $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$ é

   (a) $\sqrt{e} - e.$
   (b) $e.$
   (c) $\dfrac{e^2}{2}.$
   (d) $e - \sqrt{e}.$

---

3. Sejam $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$, $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{arctg}(x)\, dx$ e $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-3)^2}\, dx$. Considere as seguintes afirmações:

   I. I_1 é um integral impróprio de 1ª espécie;

   II. I_1 é um integral impróprio misto;

   III. I_2 é um integral impróprio misto;

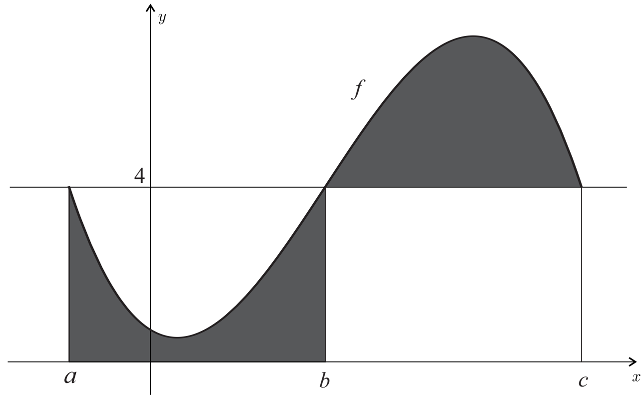
   IV. I_3 é um integral de 2ª espécie.

   A **lista completa** das afirmações correctas é:

   (a) II.
   (b) I, III e IV.
   (c) I e III.
   (d) II e IV.

---

4. Considere a região limitada representada na figura.



A área desta região pode exprimir-se por

(a) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx - 4(b-c).$

(b) $\displaystyle\int_a^b \big(4 - f(x)\big)\,dx + \int_b^c \big(f(x) - 4\big)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c 4\,dx.$

(d) $\displaystyle 4(c-a) + \int_c^b f(x)\,dx.$

---

5. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. O $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ é,

(a) $0.$ (b) $f'(0).$ (c) $f(c), c > 0.$ (d) $f(0).$

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. (a) **[2.0 val.]** Determine $P\big(x\log^2(x)\big)$.

   (b) **[2.5 val.]** Calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx.$

   (c) **[2.5 val.]** Indique uma substituição $x = \varphi(t)$, uma função racional $R(t)$ e os valores t_0 e t_1, para os quais

$$\int_2^3 \frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx = \int_{t_0}^{t_1} R(t)\,dt.$$

2. Considere a função F, real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\,dt \text{ e } g(x) = \int_1^x h(y)\,dy.$$

   (a) **[2,0 val.]** Calcule a derivada de F. Justifique a sua resposta.

   (b) **[2,0 val.]** Supondo que $h(y) = \dfrac{1}{y}$ e que $f(t) = \dfrac{1}{t-1}$, determine o domínio de F. Justifique a sua resposta.

3. Considere as seguintes funções $f(x) = \dfrac{4}{3x^2+1}$ e $g(x) = x^2$.

(a) **[2,0 val.]** Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

(b) **[2,0 val.]** Determine a área do domínio plano ilimitado compreendido entre os gráficos das funções f e g e a recta $y = 0$, situado no semiplano $x \geq 0$.

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^{\mu}, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^{\mu}$ $\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\text{sen}(t)$ ou $x = a\,\cos(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(t)$ ou $x = a\,\text{cosec}(t)$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$
$f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot R(\log(x))$	$\log(x) = t$
$f(x) = R(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c})$	$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = \sqrt{a}\,x + t$ se $a > 0$
	$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,x + \sqrt{c}$ se $c > 0$
	$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,(x - \alpha)$ ou $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,(x - \beta)$ se α e β são zeros reais distintos de $a\,x^2 + b\,x + c$

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Número de caderno

Análise Matemática I

3º Teste – 18 de Dezembro de 2017

Folha de Respostas – Enunciado A

Nome:____

Número de Aluno:________________ Curso:____________________

	a)	b)	c)	d)
1.	☐	☐	☐	☐
2.	☐	☐	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☐
4.	☐	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☐

Folha nº 2

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado B

Análise Matemática I

3º Teste — 18 de Dezembro de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. A primitiva de $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}}$ que toma o valor 2π em $x=2$ é a função:

(a) $3\sqrt{4-x^2}+2\pi$.
(c) $3\,\mathrm{arcsen}(\frac{x}{2})+\pi/2$.
(b) $x\sqrt{4-x^2}+2\pi$.
(d) $3\,\mathrm{arcsen}(1-\frac{x}{2})+\pi/2$.

---

2. O valor do $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ é

(a) $\sqrt{e}-e$.
(b) $e-\sqrt{e}$.
(c) e.
(d) $\dfrac{e^2}{2}$.

---

3. Sejam $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$, $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{arctg}(x)\,dx$ e $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$. Considere as seguintes afirmações:

I. I_1 é um integral impróprio de 1ª espécie;

II. I_1 é um integral impróprio misto;

III. I_2 é um integral impróprio misto;

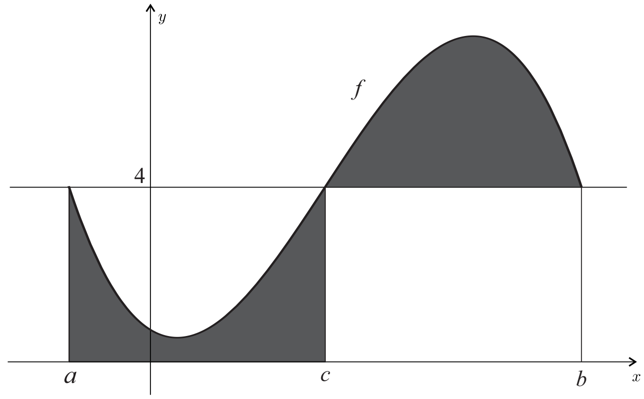
IV. I_3 é um integral de 2ª espécie.

A **lista completa** das afirmações correctas é:

(a) I, III e IV.
(c) II e IV.
(b) I e III.
(d) II.

---

4. Considere a região limitada representada na figura.



A área desta região pode exprimir-se por

(a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - 4(c-b)$.

(b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b 4\,dx$.

(c) $\displaystyle\int_a^c \big(4 - f(x)\big)\,dx + \int_c^b \big(f(x) - 4\big)\,dx$.

(d) $\displaystyle 4(b-a) + \int_b^c f(x)\,dx$.

---

5. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. O $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ é,

(a) 0. (b) $f(0)$. (c) $f'(0)$. (d) $f(c), c > 0$.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. (a) **[2.0 val.]** Determine $P\big(x\log^2(x)\big)$.

   (b) **[2.5 val.]** Calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$.

   (c) **[2.5 val.]** Indique uma substituição $x = \varphi(t)$, uma função racional $R(t)$ e os valores t_0 e t_1, para os quais

$$\int_2^3 \frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx = \int_{t_0}^{t_1} R(t)\,dt.$$

2. Considere a função F, real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\,dt \text{ e } g(x) = \int_1^x h(y)\,dy.$$

   (a) **[2,0 val.]** Calcule a derivada de F. Justifique a sua resposta.

   (b) **[2,0 val.]** Supondo que $h(y) = \dfrac{1}{y}$ e que $f(t) = \dfrac{1}{t-1}$, determine o domínio de F. Justifique a sua resposta.

3. Considere as seguintes funções $f(x) = \dfrac{4}{3x^2+1}$ e $g(x) = x^2$.

(a) **[2,0 val.]** Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

(b) **[2,0 val.]** Determine a área do domínio plano ilimitado compreendido entre os gráficos das funções f e g e a recta $y = 0$, situado no semiplano $x \geq 0$.

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^{\mu}, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^{\mu}$ $\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\text{sen}(t)$ ou $x = a\,\cos(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(t)$ ou $x = a\,\text{cosec}(t)$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$
$f(x) = \frac{1}{x} \cdot R(\log(x))$	$\log(x) = t$
$f(x) = R(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c})$	$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = \sqrt{a}\,x + t$ se $a > 0$
	$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,x + \sqrt{c}$ se $c > 0$
	$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,(x - \alpha)$ ou $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,(x - \beta)$ se α e β são zeros reais distintos de $a\,x^2 + b\,x + c$

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Número de caderno

Análise Matemática I

3º Teste – 18 de Dezembro de 2017

Folha de Respostas – Enunciado B

Nome:____

Número de Aluno:________________ Curso:________________________

	a)	b)	c)	d)
1.	☐	☐	☐	☐
2.	☐	☐	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☐
4.	☐	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☐

Folha nº 2