

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam 0,2 cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Considere os conjuntos A , B e C definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N} \right\}, B = \left] \frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right[, \text{ e } C = \{1\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Seja $D = A \cup B \cup C$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ☐ a) $\text{fr}(D) = A \cup C \cup \{0\}$ e 1 é um ponto de acumulação de D .
- ☐ b) $D' = \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right] \cup \{0, 1\}$ e $\text{fr}(D) = A \cup C$.
- ☐ c) D é um conjunto aberto.
- ☐ d) $\text{fr}(D) = A \cup C \cup \{1\}$.

2. Considere os conjuntos definidos na pergunta anterior. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ☐ a) Não existe $\inf(A)$ e $\inf(C) = 1$.
- ☐ b) $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x, \forall a \in D\} =]2, +\infty[$.
- ☐ c) $\max(C) = 2$ e $\min(C) = 1$.
- ☐ d) $\min(D) = \frac{1}{2}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x \leq a, \forall a \in D\} =]-\infty, 0]$.

3. Seja (x_n) uma sucessão não limitada superiormente. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

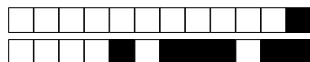
- ☐ a) $\forall n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+p}$.
- ☐ b) $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- ☐ c) O conjunto dos termos da sucessão (x_n) admite minorantes.
- ☐ d) (x_n) é um infinitamente grande positivo.

4. Seja D o domínio da função real de variável real, f , definida por

$$f(x) = \log \left(\frac{x-3}{x^2} \right) \frac{\sqrt{1-(4-x)^2}}{x-2}.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ☐ a) 5 não é um ponto fronteiro de D .
- ☐ b) Não existe nenhuma vizinhança de $\frac{7}{2}$ contida em D .
- ☐ c) Toda a vizinhança de 5 intersecta D e o seu complementar.
- ☐ d) O conjunto D tem pontos isolados.



5. Considere a sucessão $u_n = \frac{25n}{3n+1}, n \in \mathbb{N}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ☐ a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 11 \Rightarrow u_n \in V_{0.2}\left(\frac{25}{3}\right)$.
- ☐ b) A sucessão (u_n) não é monótona.
- ☐ c) A sucessão (u_n) não é limitada.
- ☐ d) A sucessão (u_n) converge para o supremo dos seus termos.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1.

(a) [1.5 val.] Calcule o valor de $\lim \left(\frac{2^n - \pi^{n+1}}{\pi^n - 2^{n+1}} \right)$;

(b) Considere a sucessão $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{n^2}{5n^3 + 2k}$.

- (a) [0.5 val.] Determine v_1 ;
- (b) [1.0 val.] Mostre que (v_n) é limitada;
- (c) [2.0 val.] Calcule, caso exista, o limite de (v_n) .

2.

(a) [3.0 val.] Utilizando o Princípio de Indução Matemática prove que

$$n! \leq n^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Seja $a_n = \frac{10^n}{n!}, n \in \mathbb{N}$.

- (a) [2.0 val.] Mostre que $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq 9$.
- (b) [1.5 val.] a_n é uma sucessão convergente? Justifique.

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}, & \text{se } x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x > 0 \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- (a) [1.0 val.] Determine o domínio de f .
- (b) [1.5 val.] Estude a continuidade de f no seu domínio.
- (c) [1.0 val.] Averigüe se $x = 0$ é uma descontinuidade removível de f . Justifique.