FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado A

Análise Matemática I

2º Teste — 10 de Maio de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 4 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x - \operatorname{sen}(x) + e^x$. Considere as seguintes afirmações:

   I. A equação $f(x) = x$ tem uma solução no intervalo $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$;

   II. O contradomínio de qualquer restrição de f a um intervalo fechado é um intervalo limitado;

   III. A função f tem máximo e mínimo absolutos no intervalo $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$;

   IV. O contradomínio de qualquer restrição de f a um intervalo fechado limitado é um intervalo fechado limitado.

   A **lista completa** das afirmações correctas é:

   (a) I, III e IV.
   (b) I, II e III.
   (c) III e IV.
   (d) I e III.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 2\operatorname{sen}(x)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   (a) A equação $f(x) = 0$ tem infinitas soluções.
   (b) A equação $f(x) = 0$ não tem soluções.
   (c) A equação $f(x) = 0$ tem exactamente uma solução.
   (d) A equação $f(x) = 0$ tem exactamente três soluções.

3. Sejam f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e h a função definida por $h(x) = f\left(\operatorname{sen}\big(\log(x)\big)\right)$. Se $f'(0) = 2$ qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   (a) h é crescente em $\mathbb{R}$.
   (b) $h(1)$ é máximo local de h.
   (c) $x = e^{\pi}$ é ponto de estacionaridade de h.
   (d) $h'(1) = 2$

4. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função tal que para cada $x > 0$

$$\exists c \in \,]0, x[\, : f(x) = \log(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{1 - e^c}{(1 + e^c)^3} \cdot \frac{x^3}{6}.$$

Qual o valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - \log(2) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{3}}{x^3}$?

(a) $-\frac{1}{3}$.

(b) $\frac{1 - e^c}{6(1 + e^c)^3} - \frac{1}{3}$.

(c) $\frac{1}{3}$.

(d) 0.

5. Sejam F e G duas funções contínuas em $[0, 2]$, diferenciáveis em $]0, 2[$ tais que $F(x) - G(x) = k$, $k \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, e $G'(x) \neq 0$, $\forall x \in \,]0, 2[$. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(a) $\exists c \in \,]0, 2[\, : F'(c) = G'(c) = 0$.

(b) $\exists c \in \,]0, 2[\, : F(c) = G(c)$.

(c) $\exists c \in \,]0, 2[\, : \dfrac{F'(c)}{G'(c)} = \dfrac{F(2) - F(0)}{G(2) - G(0)}$.

(d) $\exists c \in \,]0, 2[\, : \dfrac{F(c)}{G(c)} = \dfrac{F(2) - F(0)}{G(2) - G(0)}$.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[3.0 val.]** Determine constantes reais a e b tais que $\lim_{x \to 1} \dfrac{e^{x-1} \log(x) - (ax + b)}{(x - 1)^2} = \dfrac{1}{2}$.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(e^x + 1)$.

   (a) **[1.5 val.]** Escreva a Fórmula de MacLaurin de f com resto de Lagrange de ordem 3.

   (b) **[2.0 val.]** Utilizando a alínea anterior prove que

$$f(x) \leq \log(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x < 0 \\ x + \operatorname{sen}(2x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f.

   (b) **[1.5 val.]** Caracterize a função derivada de f.

   (c) **[2.0 val.]** Estude a monotonia e os extremos de f.

   (d) **[2.5 val.]** <u>Usando o Teorema de Taylor</u> determine os pontos de inflexão de f em $\mathbb{R}^+$.

4. **[2.0 val.]** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e $f'(-1) = f'(1) = 0$. Mostre que existe $c \in \,]-1, 1[$ tal que $f''(c) \cdot f(c) - \big(f'(c)\big)^2 = 0$.

   <u>Sugestão</u>: Considere a função $g(x) = \log\big(f(x)\big)$.