FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado B

Análise Matemática I

1º Teste — 5 de Abril de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 4 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

Considere o conjunto $C = A \cup B$ onde $A = \left[\frac{1}{100}, 10\right[$ e B é o conjunto dos termos da sucessão (a_n) definida por

$$a_n = \begin{cases} -n, & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

1. Qual o interior e a fronteira de C?

   (a) $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{99}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 49\}$.
   (b) $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{100}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 101\}$.
   (c) $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{100}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$.
   (d) $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{100}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 99\}$.

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   (a) $\sup(C) = 10$ e $\inf(B) = 0$.
   (b) $\max(C) = 10$ e B não é minorado.
   (c) $\inf(C) = \frac{1}{99}$ e $\sup(B) = 1$.
   (d) $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$ e $\overline{\lim}\, a_n = 0$.

3. O conjunto S dos pontos isolados e o derivado de C são

   (a) $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$ e $C' = A \cup \{0\}$.
   (b) $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$ e $C' = \overline{A} \cup \{0\}$.
   (c) $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 49\}$ e $C' = \overline{A} \cup \{0\}$.
   (d) $S = B \setminus \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \leq 51\}$ e $C' = A \cup \{0\}$.

4. Seja D o domínio da função real de variável real, f, definida por $f(x) = \dfrac{\log(2x-1)^2}{\arccos(x^2-3)}$. Qual a fronteira de D?

(a) $\{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$.

(b) $\{-2, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 2\}$.

(c) $\{-2, \frac{1}{2}, 2\}$.

(d) $\{\sqrt{2}, 2\}$.

5. Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado e (x_n) uma sucessão de Cauchy de elementos de D. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) A sucessão (x_n) não tem subsucessões convergentes.

(b) O conjunto dos sublimites de (x_n) é um conjunto singular.

(c) A sucessão (x_n) é monótona e limitada.

(d) O limite de (x_n) pertence a D.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[2.5 val.]** Utilizando o Princípio de Indução Matemática prove que

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

2. Calcule, se existir, o valor dos seguintes limites:

(a) **[1.5 val.]** $\lim \left(\dfrac{2^n+3}{4^n+1}\right)^{4^n} \cdot \cos(4^n+\pi)$;

(b) **[2.0 val.]** $\lim \displaystyle\sum_{k=2}^{2n+3} \frac{\operatorname{arctg}(e^n)}{4+\sqrt{5n^2+k}}$;

(c) **[2.0 val.]** $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n^5}{n!+1}}$.

3. Considere a sucessão (u_n) definida por $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = 1 + (u_n - 1)\, u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(a) **[1.5 val.]** Admitindo que $u_n \in \,]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, prove que a sucessão é estritamente monótona.

(b) **[1.5 val.]** Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(\operatorname{sen}(x)+1)}, & \text{se } |x| < \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{arctg}\left(e^{x-\pi/2}\right), & \text{se } |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f.

(b) **[1.0 val.]** Estude a continuidade de f no seu domínio.

(c) **[1.0 val.]** Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(d) **[1.5 val.]** Averigúe se é possível prolongar f por continuidade a cada um dos pontos $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$. Justifique.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Número de caderno

Análise Matemática I

1º Teste – 5 de Abril de 2017

Folha de Respostas – Enunciado B

Nome:____

Número de Aluno:________________ Curso:______________________

	a)	b)	c)	d)
1.	☐	☐	☐	☐
2.	☐	☐	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☐
4.	☐	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☐

Folha nº 2

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Grelha de Correcção do Enunciado B

Análise Matemática I

1º Teste – 5 de Abril de 2017

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 4 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

Considere o conjunto $C = A \cup B$ onde $A = \left[\frac{1}{100}, 10\right[$ e B é o conjunto dos termos da sucessão (a_n) definida por

$$a_n = \begin{cases} -n, & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

1. Qual o interior e a fronteira de C?

   (a) $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{99}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 49\}$.
   (b) $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{100}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 101\}$.
   $\boxed{\text{(c)}}$ $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{100}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$.
   (d) $\operatorname{int}(C) = \left]\frac{1}{100}, 10\right[$ e $\operatorname{fr}(C) = \left\{0, \frac{1}{100}, 10\right\} \cup \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 99\}$.

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   (a) $\sup(C) = 10$ e $\inf(B) = 0$.
   (b) $\max(C) = 10$ e B não é minorado.
   (c) $\inf(C) = \frac{1}{99}$ e $\sup(B) = 1$.
   $\boxed{\text{(d)}}$ $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$ e $\overline{\lim}\, a_n = 0$.

3. O conjunto S dos pontos isolados e o derivado de C são

   (a) $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$ e $C' = A \cup \{0\}$.
   $\boxed{\text{(b)}}$ $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 51\}$ e $C' = \overline{A} \cup \{0\}$.
   (c) $S = \{a_{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 49\}$ e $C' = \overline{A} \cup \{0\}$.
   (d) $S = B \setminus \{a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}, n \leq 51\}$ e $C' = A \cup \{0\}$.

4. Seja D o domínio da função real de variável real, f, definida por $f(x) = \dfrac{\log(2x-1)^2}{\arccos(x^2-3)}$. Qual a fronteira de D?

$\boxed{\text{(a)}}$ $\{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$.

(b) $\{-2, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 2\}$.

(c) $\{-2, \frac{1}{2}, 2\}$.

(d) $\{\sqrt{2}, 2\}$.

5. Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado e (x_n) uma sucessão de Cauchy de elementos de D. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) A sucessão (x_n) não tem subsucessões convergentes.

$\boxed{\text{(b)}}$ O conjunto dos sublimites de (x_n) é um conjunto singular.

(c) A sucessão (x_n) é monótona e limitada.

(d) O limite de (x_n) pertence a D.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[2.5 val.]** Utilizando o Princípio de Indução Matemática prove que

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Resposta: Seja $p(n)$ a proposição $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$. Se $n=2$ obtemos $1-\frac{1}{2^2} = \frac{2+1}{4}$ que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de Indução: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Tese de Indução: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Demonstração: Pela associatividade da multiplicação e por hipótese de indução temos a igualdade

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \\ = \;&\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right).\end{aligned}$$

Mas

$$\frac{n+1}{2n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)},$$

portanto, a proposição $p(n+1)$ é válida.

Como a proposição é verdadeira para $n=2$ e é hereditária concluímos, pelo Princípio de Indução, que

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

2. Calcule, se existir, o valor dos seguintes limites:

(a) **[1.5 val.]** $\lim \left(\dfrac{2^n+3}{4^n+1}\right)^{4^n} \cdot \cos\left(4^n+\pi\right)$;

(b) **[2.0 val.]** $\lim \displaystyle\sum_{k=2}^{2n+3} \frac{\operatorname{arctg}(e^n)}{4+\sqrt{5n^2+k}}$;

(c) **[2.0 val.]** $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n^5}{n!+1}}$.

Resposta: (a) Consideremos a sucessão de termo geral $\cos\left(4^n+\pi\right)$. Como $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, esta sucessão é limitada.

Seja $a_n = \left(\dfrac{2^n+3}{4^n+1}\right)^{4^n}$. Obtemos sucessivamente

$$a_n = \left(\frac{2^n+3}{4^n+1}\right)^{4^n} = \left(\frac{\dfrac{2^n}{4^n}+\dfrac{3}{4^n}}{1+\dfrac{1}{4^n}}\right)^{4^n} = \left(\frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{3}{4^n}}{1+\dfrac{1}{4^n}}\right)^{4^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim 4^n = +\infty$ e $\lim \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{3}{4^n}}{1+\dfrac{1}{4^n}} = 0$, temos

$$\lim a_n = 0.$$

Como o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo concluímos que

$$\lim \left(\frac{2^n+3}{4^n+1}\right)^{4^n} \cdot \cos\left(4^n+\pi\right) = 0.$$

(b) Podemos escrever

$$\sum_{k=2}^{2n+3} \frac{\operatorname{arctg}(e^n)}{4+\sqrt{5n^2+k}} = \operatorname{arctg}(e^n) \cdot \sum_{k=2}^{2n+3} \frac{1}{4+\sqrt{5n^2+k}}.$$

Sejam $a_n = \operatorname{arctg}(e^n)$ e $b_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{2n+3} \frac{1}{4+\sqrt{5n^2+k}}$.

Como $\lim\ e^n = +\infty$ obtemos $\lim a_n = \dfrac{\pi}{2}$.

O termo geral b_n da sucessão está definido como a soma de $k=2$ a $k=2n+3$ de $\dfrac{1}{4+\sqrt{5n^2+k}}$. A maior parcela é $\dfrac{1}{4+\sqrt{5n^2+2}}$ (que corresponde a $k=2$) e a menor é $\dfrac{1}{4+\sqrt{5n^2+2n+3}}$ (correspondente a $k=2n+3$), como está demonstrado a seguir. Temos

$$4+\sqrt{5n^2+k} \geq 4+\sqrt{5n^2+2}, \ \forall\, k,n \in \mathbb{N},\ k \geq 2,$$

portanto,

$$\frac{1}{4+\sqrt{5n^2+k}} \leq \frac{1}{4+\sqrt{5n^2+2}}, \ \forall\, k,n \in \mathbb{N},\ k \geq 2,$$

e

$$4+\sqrt{5n^2+k} \leq 4+\sqrt{5n^2+2n+3},\ \forall\, k,n \in \mathbb{N},\ k \geq 2 \text{ tais que } k \leq 2n+3,$$

o que implica

$$\frac{1}{4+\sqrt{5n^2+k}} \geq \frac{1}{4+\sqrt{5n^2+2n+3}},\ \forall\, k,n \in \mathbb{N},\ k \geq 2 \text{ tais que } k \leq 2n+3.$$

Logo para todo o n e $2 \leq k \leq 2n+3$, temos:

$$\frac{1}{4+\sqrt{5n^2+2n+3}} \leq \frac{1}{4+\sqrt{5n^2+k}} \leq \frac{1}{4+\sqrt{5n^2+2}}.$$

Como (b_n) está definida como uma soma de $2n+3-2+1=2n+2$ parcelas obtemos,

$$(2n+2)\cdot\frac{1}{4+\sqrt{5n^2+2n+3}} \leq \sum_{k=2}^{2n+3}\frac{1}{4+\sqrt{5n^2+k}} \leq (2n+2)\cdot\frac{1}{4+\sqrt{5n^2+2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+2}{4+\sqrt{5n^2+2n+3}} \leq \sum_{k=2}^{2n+3}\frac{1}{4+\sqrt{5n^2+k}} \leq \frac{2n+2}{4+\sqrt{5n^2+2}},\quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $c_n = \dfrac{2n+2}{4+\sqrt{5n^2+2n+3}}$. Dividindo o numerador e o denominador da fracção que define a sucessão por n temos:

$$\lim c_n = \lim \frac{2+\frac{2}{n}}{\frac{4+\sqrt{5n^2+2n+3}}{n}} = \lim \frac{2+\frac{2}{n}}{\frac{4}{n}+\sqrt{\frac{5n^2+2n+3}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Seja $d_n = \dfrac{2n+2}{4+\sqrt{5n^2+2}}$. Dividindo o numerador e o denominador da fracção que define a sucessão por n temos:

$$\lim d_n = \lim \frac{2+\frac{2}{n}}{\frac{4+\sqrt{5n^2+2}}{n}} = \lim \frac{2+\frac{2}{n}}{\frac{4}{n}+\sqrt{\frac{5n^2+2}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Finalmente, como os dois limites são iguais, o Teorema das Sucessões Enquadradas permite-nos concluir que

$$\lim b_n = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Assim,

$$\lim \sum_{k=2}^{2n+3}\frac{\operatorname{arctg}(e^n)}{4+\sqrt{5n^2+k}} = \lim \operatorname{arctg}(e^n)\cdot\sum_{k=2}^{2n+3}\frac{1}{4+\sqrt{5n^2+k}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

(c) Como $u_n = \dfrac{n^5}{n!+1} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)^5}{(n+1)!+1}}{\dfrac{n^5}{n!+1}} = \lim \frac{(n+1)^5\big(n!+1\big)}{n^5\big((n+1)!+1\big)}$$

$$= \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \cdot \frac{\dfrac{n!}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)!}}{1 + \dfrac{1}{(n+1)!}}$$

$$= \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \cdot \frac{\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)!}}{1 + \dfrac{1}{(n+1)!}} = 0$$

podemos concluir que $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n^5}{n!+1}} = 0$.

3. Considere a sucessão (u_n) definida por $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = 1 + (u_n - 1)\, u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(a) **[1.5 val.]** Admitindo que $u_n \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, prove que a sucessão é estritamente monótona.

(b) **[1.5 val.]** Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

Resposta: (a) A sucessão é estritamente monótona se $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou $u_{n+1} - u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas

$$u_{n+1} - u_n = 1 + (u_n - 1)\, u_n - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2.$$

Por hipótese, $u_n \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o que implica que $(u_n - 1)^2 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Concluímos que

$$u_{n+1} - u_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

isto é, a sucessão é estritamente crescente sendo, portanto, estritamente monótona.

(b) Pela alínea anterior, a sucessão é monótona e, por hipótese, é limitada pois $u_n \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Estas duas condições implicam que a sucessão é convergente. Seja $a = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n) temos $\lim u_{n+1} = a$. Pela definição da sucessão

$$\lim u_{n+1} = \lim \big(1 + (u_n - 1)\, u_n\big) \Leftrightarrow a = 1 + (a-1)a \ \Leftrightarrow \ a = 1 + a^2 - a$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 1.$$

4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\big(\operatorname{sen}(x) + 1\big)}, & \text{se } |x| < \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{arctg}\left(e^{x-\pi/2}\right), & \text{se } |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f.

(b) **[1.0 val.]** Estude a continuidade de f no seu domínio.

(c) **[1.0 val.]** Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(d) **[1.5 val.]** Averigúe se é possível prolongar f por continuidade a cada um dos pontos $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$. Justifique.

Resposta: (a)

$$\begin{aligned}
D &= \left\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}(x) + 1 \neq 0 \ \wedge \ |x| < \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : |x| > \frac{\pi}{2}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \ \wedge \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{\pi}{2} \ \vee \ x > \frac{\pi}{2}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{\pi}{2} \ \vee \ x > \frac{\pi}{2}\right\} \\
&= \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

(b) Seja $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Sejam $f_1(x) = 2\big(\operatorname{sen}(x) + 1\big)$. Esta função é contínua em $\mathbb{R}$, por ser o produto de uma constante pela soma da função seno com outra constante, e não se anula no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Temos $f(x) = \dfrac{\pi}{f_1(x)}$, portanto, f é contínua neste intervalo.

Seja $x > \dfrac{\pi}{2}$ ou $x < -\dfrac{\pi}{2}$. Sejam $g_1(x) = x - \pi/2$, $g_2(x) = e^x$ e $g_3(x) = \operatorname{arctg}(x)$. Temos $f(x) = (g_3 \circ g_2 \circ g_1)(x)$. As funções g_1, g_2 e g_3 são funções contínuas em $\mathbb{R}$ por serem, respectivamente, uma função polinomial, a função exponencial e a função arco-tangente. Concluímos que f é contínua em $\left]-\infty, -\dfrac{\pi}{2}\right[\ \cup \ \left]\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$ por ser a composição de funções contínuas.

(c) Como $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-\pi/2} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}(x) = 0$ temos, pelo teorema do limite da função composta,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(e^{x-\pi/2}\right) = 0.$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\pi/2} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) = \dfrac{\pi}{2}$ temos, novamente pelo teorema do limite da função composta,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(e^{x-\pi/2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(d) Uma função f é prolongável por continuidade a um ponto a se, e só se, existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Vejamos se existe $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{arctg}\left(e^{x-\pi/2}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}; \\
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\pi}{2\big(\operatorname{sen}(x) + 1\big)} = \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

portanto, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \dfrac{\pi}{4}$, e a função é prolongável por continuidade a $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Vejamos se existe $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x)$:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\pi}{2\big(\operatorname{sen}(x)+1\big)} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{arctg}\left(e^{x-\pi/2}\right) = \operatorname{arctg}\left(e^{-\pi}\right),$$

portanto, não existe $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x)$, o que implica que f não é prolongável por continuidade a $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Número de caderno

Análise Matemática I

1º Teste – 5 de Abril de 2017

Folha de Respostas – Enunciado B

Nome:____

Número de Aluno:__________________ Curso:______________________________

	a)	b)	c)	d)
1.	☐	☐	☐	☐
2.	☐	☐	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☐
4.	☐	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☐

Folha nº 2