FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Enunciado B

Análise Matemática I

3º Teste — 19 de Dezembro de 2016

O Teste compõe-se de 5 questões de escolha múltipla e 5 de resposta aberta. Em cada uma das questões de escolha múltipla apenas uma das alíneas é correcta. Determine-a e assinale-a no quadrado reservado para o efeito na folha de respostas.

Duração: 1H 30M.

Cotação: Nas questões de escolha múltipla, as respostas certas valem 1 valor cada e as respostas erradas descontam $0,2$ cada (não se desconta caso não haja resposta). A cotação total do teste é de 20 valores.

1. Seja $f(x) = \dfrac{2e^x}{1+e^{2x}}$. Então $\displaystyle\int_0^{\log(\sqrt{3})} f(x)\,dx$ é igual a:

   (a) $\dfrac{\pi}{12}$. (b) $-\dfrac{\pi}{6}$. (c) $-\dfrac{\pi}{12}$. (d) $\dfrac{\pi}{6}$.

---

2. A primitiva $F(x)$ de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, definida no intervalo $]0,+\infty[$, que satisfaz $F\left(\dfrac{1}{\pi}\right) = 1$, verifica também:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 3$.

   (b) $F\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = 1$.

   (c) $F\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = 0$.

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x) = 1$.

---

3. Seja g uma função polinomial de grau menor ou igual a 3. A função racional

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x^2-2x+4)(x^2+2x+1)}$$

tem a seguinte decomposição em fracções simples, onde A, B, C e D são constantes reais:

   (a) $\dfrac{Ax}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx}{x^2-2x+4}$.

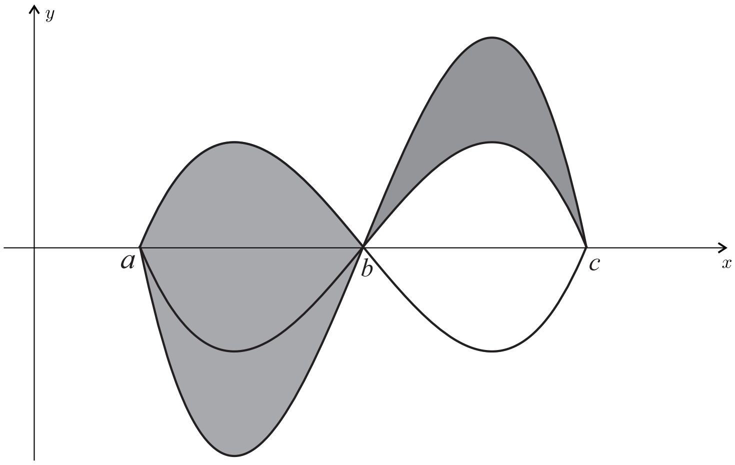
   (b) $\dfrac{A}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2-2x+4}$.

   (c) $\dfrac{Ax+B}{(x+1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2-2x+4}$.

   (d) $\dfrac{A}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x^2-2x+4}$.

---

4. Na figura abaixo estão representados os gráficos das funções f, $-f$ e $2f$ definidas no intervalo $[a, c]$ e com um zero no ponto $x = b$.



A área sombreada é dada pelo integral

(a) $\int_b^a 3f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$

(b) $\int_a^b 3f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$

(c) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c 2f(x)\,dx.$

(d) $\int_b^a f(x)\,dx + \int_b^c 2f(x)\,dx.$

---

5. Seja f uma função contínua em $[0, 4]$ e $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, com $a \in [0, 4]$. Considere as seguintes afirmações:

I. Existe $b \in [0, 4]$ tal que $\int_0^4 G(t)\,dt = 4\int_a^b f(t)\,dt$;

II. G é contínua em $[0, 4]$, mas pode não ser integrável em $[0, 4]$;

III. G é integrável em $[0, 4]$ uma vez que é contínua neste intervalo;

IV. Existe $b \in [0, 4]$ tal que $4\int_0^4 f(t)\,dt = G(b)$.

A **lista completa** das afirmações correctas é:

(a) III.

(b) III e IV.

(c) I e III.

(d) II e IV.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1. **[2,5 val.]** Calcule o valor do seguinte integral:

$$\int_0^{e^2-1} \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}\,dx.$$

2. Considere o integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3\,\mathrm{sen}(x)+2}{\big(\cos(x)+2\big)\big(1-\mathrm{sen}(x)\big)}\,dx.$$

(a) **[2.0 val.]** Utilize uma substituição conveniente para mostrar que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{3\,\mathrm{sen}(x)+2}{\big(\cos(x)+2\big)\big(1-\mathrm{sen}(x)\big)}\,dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{4t^2+12t+4}{(t^2+3)(t-1)^2}\,dt.$$

(b) **[2.5 val.]** Calcule o valor do integral.

3. **[2.0 val.]** Determine a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções

$$f(x) = 4 - x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4.$$

4. Considere a função F, real de variável real, definida por

$$F(x) = \int_{1}^{x^3-8} \frac{\log(t^2)}{\sqrt{t+1}}\,dt.$$

(a) **[2,0 val.]** Determine o domínio de F. Justifique a sua resposta.

(b) **[2,0 val.]** Calcule a derivada de F. Justifique a sua resposta.

5. **[2.0 val.]** Calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x^2+1)\,\mathrm{arctg}(x)} - \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx.$$

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \mathrm{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^\mu$ $\mu = \mathrm{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\,\mathrm{sen}(t)$ ou $x = a\,\cos(t)$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec(t)$ ou $x = a\,\mathrm{cosec}(t)$
$f(x) = R(\mathrm{sen}(x), \cos(x))$	$\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$
$f(x) = \frac{1}{x} \cdot R(\log(x))$	$\log(x) = t$