Análise Matemática 1

1º teste - 20/04/2016

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

Exercício 1

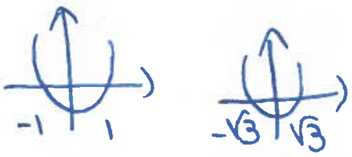
a)

$$\frac{1-|x^2-2|}{(x-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1-|x^2-2| \geq 0 \ \wedge \ (x-1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow |x^2-2| \leq 1 \ \wedge \ x \neq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2-2 \leq 1 \ \wedge \ x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x^2 \ \wedge \ x^2 \leq 3 \ \wedge \ x \neq 1 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0 \ \wedge \ x^2-3 \leq 0 \ \wedge \ x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\ \wedge \ x \in [-\sqrt{3},\sqrt{3}] \ \wedge \ x \neq 1 \Leftrightarrow$$

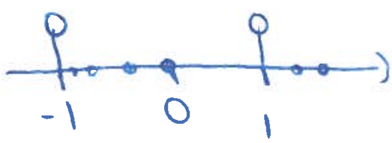


$$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3},-1] \cup]1,\sqrt{3}]$$

$$A = [-\sqrt{3},-1] \cup]1,\sqrt{3}]$$

b)

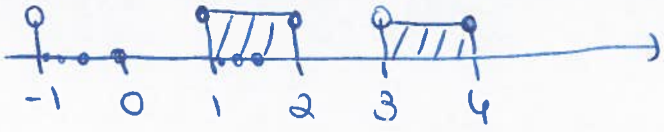
$$(-1)^n + \frac{1}{n} = \begin{cases} -1+\frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1+\frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$



$$\text{int}(C) = \emptyset$$

$$\text{fr}(C) = C \cup \{-1,1\}$$

e)



$$(B\cup C)' = [1,2] \cup [3,4] \cup \{-1\}$$

$$\overline{B\cup C} = [1,2] \cup [3,4] \cup \{-1\} \cup \left\{-1 + \frac{1}{2n-1},\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

$B\cup C$ não é fechado pois, por exemplo, $-1 \in \overline{B\cup C}$ mas $-1 \notin B\cup C$.

Exercício 2

a)

$$u_n = 5^n + 1 > 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{5^{n+1}+1}{5^n+1} = \lim \frac{5+\frac{1}{5^n}}{1+\frac{1}{5^n}} = 5$$

Assim $\lim \sqrt[n]{5^n+1} = 5$ logo

$$\lim \frac{\sqrt[n]{5^n+1}}{n} = 0$$

b)

$$(n-5+1)\times\frac{n^5}{2n^6+n^2} \leq \sum_{k=5}^{n}\frac{n^5}{2n^6+k^2} \leq \frac{n^5}{2n^6+25}\times(n-5+1),\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\lim \frac{(n-4)\,n^5}{2n^6+n^2} = \lim \frac{1-\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{(n-4)\,n^5}{2n^6+25} = \lim \frac{1-\frac{4}{n}}{2+\frac{25}{n^6}} = \frac{1}{2}$$

Pelo Teorema das Sucessões Enquadradas

$$\lim \sum_{k=5}^{n} \frac{n^5}{2n^6+k^2} = \frac{1}{2}.$$

Exercício 3

a)

Mostremos que a desigualdade é válida para $n=1$.

$u_1 = 1 \geq 0$ → proposição verdadeira

Provemos agora que se a desigualdade é válida para o natural n, então também é válida para o natural $n+1$.

Hipótese: $u_n \geq 0$

Tese: $u_{n+1} \geq 0$

Prova da tese:

$$u_{n+1} = \underbrace{2u_n}_{\substack{\geq 0, \\ \text{por hipótese} \\ \text{de indução}}} + \underbrace{\frac{n+3}{4n+4}}_{\geq 0 \text{ pois } n \in \mathbb{N}} \geq 0$$

b) Mostrar que (u_n) é crescente equivale a mostrar que

$$u_{n+1} - u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n + \frac{n+3}{4n+4} - u_n = \underbrace{u_n}_{\substack{\geq 0, \text{ pela} \\ \text{alínea a)}}} + \underbrace{\frac{n+3}{4n+4}}_{\geq 0 \text{ pois } n \in \mathbb{N}} \geq 0$$

e) Suponhamos que (u_n) é convergente, com limite l. Nestas condições, sendo (u_{n+1}) subsucessão de (u_n), (u_{n+1}) seria também convergente para l. Assim,

$$l = \lim u_{n+1} = \lim \left(2u_n + \frac{n+3}{4n+4} \right) =$$

$$= 2 \lim u_n + \lim \frac{1+\frac{3}{n}}{4+\frac{4}{n}} =$$

$$= 2l + \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -l = \frac{1}{4} \Leftrightarrow l = -\frac{1}{4},$$

o que é absurdo pois $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \Rightarrow \lim u_n = l \geq 0$

Assim, (u_n) diverge.

Exercício 4

a) Se $x < 0$ teríamos de ter $x \neq 0$, o que é sempre satisfeito.

Se $x > 0$ então

$$-1 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} -x-1 \leq 1 \wedge 1 \leq x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x \leq 2 \wedge 0 \leq x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \wedge 0 \leq x \text{ o que é sempre satisfeito}$$

Assim $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Para que f seja prolongável por continuidade a $x=0$ é suficiente que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \arccos\left(\frac{1}{x+1}\right) + k =$$

$$= k$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2+3x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x(x+3))}{x(x+3)} (x+3) =$$

$$= 1\times 3 = 3$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} f(x)$ basta que $k=3$.

A função prolongamento será definida por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} x \arccos\left(\frac{1}{x+1}\right) + 3, & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\operatorname{sen}(x^2+3x)}{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exercício 5

a) g é contínua em $[0, e]$ pois é a soma de duas funções contínuas (a composta de duas funções contínuas, $\operatorname{arctg} x$ e $\sqrt{x}$, e a composta de outras duas funções contínuas, $\log x$ e um polinómio)

$g(0) = \operatorname{arctg}(\sqrt{0}) + \log 1 = 0 < 1$

$g(e) = \underbrace{\operatorname{arctg}(\sqrt{e})}_{>0 \text{ pois } \sqrt{e}>0} + \log(\underbrace{e+1}_{>e \text{ logo } \log(e+1)>1}) > 1$

Pelo teorema de Bolzano,

$$\exists c \in]0, e[: g(c) = 1$$

b)

$$g'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

c)

$g'(x) = \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x+1} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ logo g é crescente e como tal é injectiva. Assim sendo, a solução de $g(x) = 1$, cuja existência foi provada na alínea a), é única.

Exercício 6

a) f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a sua derivada tem exactamente um zero. Por um dos corolários do Teorema de Rolle sabemos que f tem no máximo dois zeros.

b) h é ímpar o que significa que

$$h(-x) = -h(x) \ , \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo se $h(a)=0$ então $h(-a) = 0$.

Por outro lado,

$$h(-a) = -h(a) \Leftrightarrow h(-x) + h(x) = 0$$

Em particular, considerando $a=0$

$$h(-0) + h(0) = 0 \Leftrightarrow 2h(0) = 0 \Leftrightarrow h(0) = 0$$

A função h terá obrigatoriamente um zero em $x=0$ e o seu número de zeros será ímpar. Como na alínea b) se provou que h tem no máximo dois zeros, podemos concluir que h tem exactamente um zero.