FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I

Exame de Época de Recurso — 24 de Junho de 2016
(Duração 3 horas)

1. Seja A o domínio da função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{arcsen}(|x^2 - 5|)}{\sqrt[3]{x^2 - 5}}$$

Considere ainda os conjuntos $B = \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$ e $C = ([-5, -3] \cup [3, 5]) \setminus \{-4, 4\}$.

(a) **[1.0 val.]** Explicite o conjunto A na forma de um intervalo ou de uma união de intervalos de números reais.

(b) **[0.6 val.]** Determine o interior e a aderência de C. Indique, justificando, se C é um conjunto fechado.

(c) **[0.6 val.]** Determine o interior e a aderência de $C \cup B$. Indique, justificando, se $C \cup B$ é um conjunto aberto.

(d) **[0.3 val.]** Determine o derivado de $C \cup B$.

2. Calcule o valor dos seguintes limites:

(a) **[0.8 val.]** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2 + 4}{n^2 + n} \right)^n$

(b) **[0.7 val.]** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n + 3}{3^n + 2} \operatorname{sen} \left(\frac{3^n + 2}{2^n + 3} \right)$

3. (a) **[1.0 val.]** Recorrendo ao princípio de indução matemática, mostre que:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) **[0.5 val.]** Utilizando a alínea anterior, indique, justificando, o valor de:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Seja f a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x^2) + \log(x^2+1), & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{2x}-1}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   (a) **[1.0 val.]** Analise a continuidade e a diferenciabilidade de f no ponto $x = 0$.

   (b) **[0.8 val.]** Determine uma expressão da função derivada de f.

5. **[1.0 val.]** Seja f uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}$ tal que,

$$f(a) = f'(a) \quad \text{e} \quad f(b) = f'(b),$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq b$. Mostre que existe c entre a e b tal que $f(c) = f''(c)$.

Sugestão: Aplique o teorema de Rolle à função $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$.

6. Considere as seguintes funções:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} - x^3 \quad \text{e} \quad g(x) = 1 - \frac{x}{2} - x^4$$

   (a) **[1.0 val.]** Justifique que existe $c \in]0,1[$ tal que $f(c) = 0$.

   (b) **[0.7 val.]** Para o ponto c determinado na alínea anterior, mostre que $g(c) > 0$.

7. Calcule:

   (a) **[1.0 val.]** $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)(x-2)}dx$

   (b) **[0.8 val.]** $\displaystyle\int_1^2 x^3 e^{x^2} dx$

8. **[0.9 val.]** Recorrendo a uma substituição adequada, mostre que é possível escrever

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x+1}+3}{\sqrt[5]{(x+1)^2}+x}dx$$

como o integral de uma função racional, indicando-o. (Não efectue o respectivo cálculo.)

9. **[1.1 val.]** Represente, na forma de um integral ou de uma soma de integrais, a área do domínio plano limitado pelos gráficos das funções

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x \quad \text{e} \quad g(x) = x^3 + 5x^2 + x$$

(Não efectue o respectivo cálculo.)

10. **[1.1 val.]** Classifique e estude a natureza do seguinte integral impróprio:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x\ \mathrm{sen}(x)}{x^4 - 1} dx$$

11. Considere a seguinte função

$$F(x) = \int_1^{1+\frac{1}{x}} \mathrm{arctg}(t^2) dt$$

   (a) **[0.2 val.]** Indique o domínio de F.

   (b) **[0.8 val.]** Determine, justificando detalhadamente, uma expressão para a função derivada de F.

   (c) **[1.2 val.]** Calcule o valor do limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{\frac{1}{x^2}}$$

12. **[1.3 val.]** Considere uma função real de domínio $\mathbb{R}$ tal que a sua função derivada é definida por:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \frac{1}{1 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determine os pontos de inflexão e caracterize as concavidades do gráfico de f.

13. (a) **[0.6 val.]** Escreva a fórmula de Maclaurin da função $f(x) = (4x^2 - 3x^3)e^{x-1}$, com resto de Lagrange de ordem dois.

   (b) **[1.0 val.]** Seja g uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$ que satisfaz as condições:

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad g(1) = 1 \text{ e } g'(1) = 0.$$

Mostre que existem $c_1,\ c_2 \in [0, 1]$ tais que $g''(c_1) = -2$ e $g''(c_2) = 2$.

$\longrightarrow$ tabela de substituições no verso

Expressão	Substituição
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\cos(t)$ ou $x = a\,\sin(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\,\mathsf{sec}(t)$ ou $x = a\,\mathsf{cosec}(t)$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a\,\mathsf{tg}(t)$ ou $x = a\,\mathsf{cotg}(t)$
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^{\mu}$ $\mu =$ m.m.c.$\{n, q, \dots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^{\mu}$ $\mu =$ m.m.c.$\{n, q, \dots, s\}$
$f(x) = R(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c})$	$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = \sqrt{a}\,x + t$ se $a > 0$
	$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,x + \sqrt{c}$ se $c > 0$
	$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,(x - \alpha)$ ou $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,(x - \beta)$ se α e β são zeros reais
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$