Análise Matemática I E

2º Semestre - 2014/15

Primeiro Teste

Nota:

Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

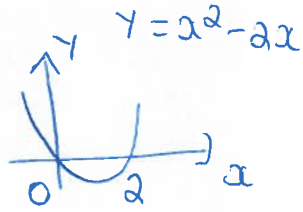
Pergunta 1

a)

$$\frac{|x-3|}{x^2-2x} > 0 \Leftrightarrow |x-3| \neq 0 \wedge x^2-2x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-3 \neq 0 \wedge x(x-2) > 0 \Leftrightarrow$$

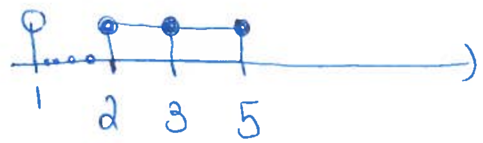
$$\Leftrightarrow x \neq 3 \quad \wedge x \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$$



Assim,

$$A =]-\infty,0[\cup]2,3[\cup]3,+\infty[$$

b) Consideremos $A =]2,3[\cup]3,5]$. O conjunto B é formado pelos termos da sucessão $1+\frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, cujo limite é 1. Façamos um esboço de $A \cup B$:



Então

$$\text{int}(A \cup B) =]2,5[$$

$$\text{fr}(A \cup B) = B \setminus \{3\} \cup \{1,5\}$$

$A \cup B$ não é aberto pois $5 \in A \cup B$ mas $5 \notin \text{int}(A \cup B)$.

$A \cup B$ não é fechado pois $1 \in \overline{A \cup B} = \text{int}(A \cup B) \cup \text{fr}(A \cup B)$ mas $1 \notin A \cup B$

e) $(A \cup B)' = [2,5] \cup \{1\}$

Pergunta 2

Comecemos por mostrar que a igualdade é válida quando $n = 2$.

$$\sum_{k=2}^{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} \right) = \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1}$$

Proposição verdadeira

Admitamos agora que a igualdade é válida para o natural n e mostremos que o mesmo se verifica para o natural $n+1$.

Hipótese: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} \right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

Tese: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} \right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$

Prova da tese:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} \right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} \right) + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} =$$

$$= -\frac{3}{2} + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \cancel{\frac{1}{n}} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

↳ pela hipótese de indução

Pergunta 3

a)
$$\lim \sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}} = \lim \frac{3}{\sqrt[n]{n!}}$$

$n! > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim (n+1) = +\infty \text{, logo } \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Assim, $\lim \sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}} = 0$.

Atendendo a que a sucessão definida por $\cos(n)$, $n \in \mathbb{N}$ é limitada entre -1 e 1 e ao resultado que nos diz que o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo, podemos concluir que

$$\lim \cos(n) \sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}} = 0$$

b)
$$\lim \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{4n} = \lim \left(\frac{2n+3-2}{2n+3}\right)^{4n} = \lim \left(1 - \frac{2}{2n+3}\right)^{4n} =$$

$$= \lim \left[\left(1 - \frac{2}{2n+3}\right)^{2n+3}\right]^{\frac{4n}{2n+3}} = (e^{-2})^2 = e^{-4} \text{ pois}$$

$$\lim \frac{4n}{2n+3} = \lim \frac{4}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{4}{2} = 2$$

e) Comecemos por enquadrar a sucessão entre duas outras sucessões adequadas:

$$\frac{n}{\sqrt{3n^3+2n+1}}(2n+1) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{n}{\sqrt{3n^3+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{3n^3+1}}(2n+1), \forall n \in \mathbb{N}$$

Como

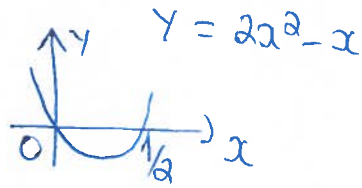
$$\lim \frac{n(2n+1)}{\sqrt{3n^3+2n+1}} = \lim \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

temos que

$$\lim \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{n}{\sqrt{3n^3+k}} = +\infty .$$

Pergunta 4

a) Primeiro ramo



$2x^2 - x > 0 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow x(2x-1) > 0 \wedge x \leq 1$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1/2, +\infty\right[\wedge x \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1/2, 1\right]$

Segundo ramo

$-1 \leq 2-x \leq 1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow -3 \leq -x \leq -1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow 3 \geq x \geq 1 \wedge x > 1$

$\Leftrightarrow x \in \left]1, 3\right]$

Assim, $D_f = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1/2, 1\right] \cup \left]1, 3\right] =$

$= \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1/2, 3\right]$

b) Para $x \in]-\infty, 0[\cup]1/2, 1[$ a função é contínua pois é definida como a diferença de duas funções contínuas (uma constante e a composta de duas funções contínuas, um logaritmo e um polinómio, logo também contínua).

Para $x \in]1, 3]$ a função é contínua pois é definida como a soma de duas funções contínuas (um polinómio e o produto de uma constante pela composta de um arccosseno com um polinómio, todas funções contínuas).

Consideremos agora $x = 1$.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \leq 1}} 1 - \log(2x^2 - x) = 1 - \log 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 2\arccos(2 - x) + x = 2\arccos 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

Como os dois limites anteriores são iguais, podemos concluir que existe limite da função quando $x = 1$ pelo que f é contínua neste ponto.

$\therefore$ A função é contínua em todo o seu domínio.

e) O intervalo $[3/4, 2]$ é um intervalo fechado, pois é igual à sua aderência, é limitado, pois admite majorantes e minorantes.

A função f é contínua em $[3/4, 2]$, uma vez que f é contínua em todo o seu domínio e $[3/4, 2] \subset D_f$.

Pelo teorema de Weierstrass f tem um máximo e um mínimo em $[3/4, 2]$, logo f é limitada em $[3/4, 2]$.

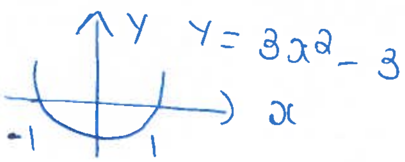
Pergunta 5

a) Começamos por determinar a derivada da função

$$f'(x) = e^{x^3 - 3x + 2}(3x^2 - 3), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^3-3x+2}(3x^2-3) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



Assim,

f é crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$

f é decrescente em $]-1, 1[$

f tem um máximo relativo em $x = -1$

f tem um mínimo relativo em $x = 1$

b) Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}$ e uma vez que a sua derivada tem exactamente dois zeros, podemos concluir utilizando um dos corolários do teorema de Rolle que f terá no máximo três zeros.

Atendendo a que f é contínua em $\mathbb{R}$ e a que

$f(-2) = e^{-8+6+2} - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$

$f(-1) = e^{-1+3+2} - 2 = e^4 - 2 > 0$

$f(1) = e^{1-3+2} - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$

$f(2) = e^{8-6+2} - 2 = e^4 - 2 > 0$

o teorema de Bolzano permite-nos concluir que f tem pelo menos três zeros, dos quais pelo menos um em cada um dos intervalos $]-2,-1[$, $]-1,1[$ e $]1,2[$.

Como tal, podemos concluir que f tem exactamente três zeros.