

Análise Matemática I (B, C, D e E)

1º Teste — 22 de Abril de 2015
 (Duração 1:30)

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x-3|}{x^2-2x} > 0 \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 1 + \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) [1.5 val.] Explícite o conjunto A sob a forma de um intervalo ou de uma união de intervalos.

Na resolução das restantes alíneas considere o conjunto $A =]2, 3[\cup]3, 5]$.

(b) [1.5 val.] Determine o interior e a fronteira do conjunto $A \cup B$. Indique, justificando, se $A \cup B$ é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

(c) [0.5 val.] Determine o derivado do conjunto $A \cup B$.

2. [2.0 val.] Prove, pelo método de indução matemática, a seguinte propriedade

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} \right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

3. Determine o valor dos seguintes limites:

(a) [1.5 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n) \sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}};$

(b) [1.5 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{4n};$

(c) [1.5 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{n}{\sqrt{3n^3 + k}}.$

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \log(2x^2 - x) & , \text{ se } x \leq 1 \\ 2 \arccos(2 - x) + x & , \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

(a) [1.5 val.] Determine o conjunto D_f , correspondente ao domínio de f .

(b) [2.0 val.] Analise f quanto à continuidade.

(c) [2.0 val.] Mostre que f é limitada em $[3/4, 2]$.

5. Considere a função f , real de variável real, definida por

$$f(x) = e^{x^3 - 3x + 2} - 2.$$

(a) [2.5 val.] Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f , no seu domínio.

(b) [2.0 val.] Mostre, sem calcular, que f tem exatamente três zeros.