FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Exame de Recurso— 23 de Junho de 2015
(Duração 3 horas)
Justifique convenientemente todas as respostas.

1. Seja A o conjunto correspondente ao domínio da função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{\log\left(\operatorname{arcsen}(x) - \frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{arctg}\left(x - \frac{3}{2}\right)}.$$

   (a) **[0.5 val.]** Explicite o conjunto A sob a forma de um intervalo ou de uma união de intervalos.

   Na resolução das restantes alíneas considere os conjuntos $B = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ e $C =]-1, 0[\cup]0, 1]$.

   (b) **[0.5 val.]** Determine o interior e a fronteira do conjunto $B \cup C$. Indique, justificando, se $B \cup C$ é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

   (c) **[0.5 val.]** Determine o derivado dos conjuntos B e de $B \cup C$.

2. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de números reais definida por

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{u_n}\ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   (a) **[1.0 val.]** Utilizando o Princípio de Indução Matemática, mostre que $u_n \geq \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) **[1.0 val.]** Sabendo que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, será $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente? Justifique a sua resposta e, em caso afirmativo, calcule o valor do respectivo limite.

3. Determine o valor dos seguintes limites:

   (a) **[1.0 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{\sqrt[n]{(2n)!}}$;

   (b) **[1.0 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n^3 \log(n+1) - n^3 \log(5n+1)\right)$.

v.s.f.f. $\longrightarrow$

4. Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{(x-1)}}{(x-1)^2} & \text{, se } x \neq 1 \\ 1 & \text{, se } x = 1. \end{cases}$$

   (a) **[0.5 val.]** Mostre que f é descontínua no ponto $x = 1$.

   (b) **[0.5 val.]** A função f tem um extremo relativo para $x = 1$? Em caso afirmativo, de que tipo?

   (c) **[0.5 val.]** Indique se f tem uma descontinuidade removível no ponto $x = 1$.

5. Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \log(x^2 + 2x) - x.$$

   (a) **[1.0 val.]** Determine o conjunto D_f, correspondente ao domínio de f.

   (b) **[1.0 val.]** Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f, no seu domínio.

   (c) **[1.0 val.]** Mostre que f tem apenas um zero no intervalo $[-3, -2[$.

6. **[1.5 val.]** Determine o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\log(x^2 - 3)}{\operatorname{arctg}(2 - x)}.$$

7. Considere uma função f, real de variável real, tal que $f'(1) = 2$, $f'''(x) < K$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e que tem um ponto de inflexão em $(1, f(1)) = (1, 0)$.

   (a) **[1.0 val.]** Escreva a fórmula de Taylor da função f, com resto de Lagrange de ordem 3, em torno do ponto de abcissa 1.

   (b) **[0.5 val.]** Mostre que $f\left(\frac{1}{2}\right) > -1 - \frac{K}{48}$.

   (c) **[0.5 val.]** Determine o seguinte limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - f(x) - x}{x^2 - 1}.$$

8. **[1.5 val.]** Mostre, usando uma substituição adequada, que o integral

$$\int_0^1 \frac{x}{(3 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}\, dx$$

   se escreve como o integral de uma função racional.

9. Calcule

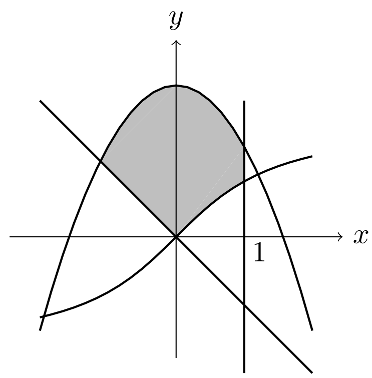
   (a) **[1.5 val.]** $\displaystyle\int \frac{x^3 - 4x^2 + 6}{x^2 - x - 2}\, dx;$

   (b) **[1.0 val.]** $\displaystyle\int_1^2 x \log(x)\, dx.$

v.s.f.f.

$\longrightarrow$

10. **[1.5 val.]** Considere as funções $f(x) = \text{arctg}(x)$, $g(x) = 2 - x^2$ e as retas $x = 1$ e $y = -x$. Represente como uma soma de integrais (**sem calcular**) o valor da área a cinzento na figura.



11. **[1.0 val.]** Classifique e estude a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{\text{tg}(\frac{\pi}{4}x)}{1-x^2}\,dx.$$

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{a\,x+b}{c\;\,x+d} = t^\mu$ $\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c})$	$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = \sqrt{a}\,x + t$, se $a > 0$ $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = t\,x + \sqrt{c}$, se $c > 0$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$ $R(-\text{sen}(x), -\cos(x)) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(x) = t$